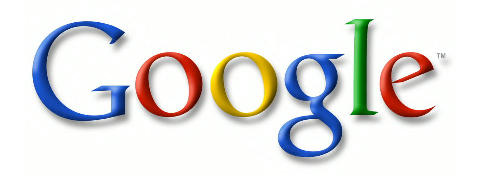



VE RI
TAS
ET
CHRISTO
ECCLESIAE

BEITRÄGE
ZUR ELEMENTAREN THEORIE DER POTENZREIHEN UND DER EINDEUTIGEN ANALYTISCHEN FUNKTIONEN ZWEIER VERÄNDERLICHEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT (II. SEKTION)
DER K. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

AM 22. JUNI 1903

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

FRITZ HARTOGS
AUS FRANKFURT A. M.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG
1904

HERRN

PROFESSOR DR. ALFRED PRINGSHEIM

IN DANKBARER VEREHRUNG.

Inhalt.

V. Darstellung der analytischen Funktionen zweier Veränderlichen durch absolut konvergente Potenzreihen. Der Cauchy-Laurentsche Satz. Singuläre Stellen.

VI. Erweiterungen des Satzes von der Unmöglichkeit isolierter singulärer Stellen.

VII. Darstellung der analytischen Funktionen zweier Veränderlichen durch die Zeilen- oder Diagonalenreihen von Potenzreihen.

Während die Potenzreihen einer Veränderlichen, insbesondere seit sie durch Weierstraß zum eigentlichen Fundament der Funktionentheorie gemacht worden sind, nach den verschiedensten Richtungen hin eine fast erschöpfende Behandlung erfahren haben, ist zur Erforschung der Natur der Potenzreihen mehrerer Veränderlichen bisher noch wenig geschehen. Und doch tritt uns hier schon bei oberflächlicher Betrachtung eine große Reihe von Fragen entgegen, zu welchen im Falle *einer* Veränderlichen keinerlei Analogon existiert. So werden die Konvergenzverhältnisse der Potenzreihen *einer* Veränderlichen im wesentlichen charakterisiert durch eine einzige Konstante, den Konvergenzradius; ist dieser bekannt, so bleibt höchstens noch das Verhalten der Potenzreihe auf der Peripherie des Konvergenzkreises weiteren Untersuchungen vorbehalten. Diese Tatsache findet, wie bekannt, ihre Begründung in dem folgenden Satz:

„Konvergiert die Potenzreihe einer Veränderlichen

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu$$

für irgend einen von null verschiedenen Wert $x = x_0$, so konvergiert sie absolut für jeden Wert der Veränderlichen, welcher der Bedingung $|x| < |x_0|$ genügt."

Schon dieser Satz ist aber auf Potenzreihen zweier Veränderlichen nicht unmittelbar übertragbar, ein Umstand, welcher selbst in der neueren Literatur gelegentlich übersehen worden ist.[1]) In der Tat folgt aus der nur bedingten Konvergenz einer Potenzreihe zweier Veränderlichen

$$\mathfrak{P}(x, y) = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$$

in einem Punkt $x = x_0$, $y = y_0$, dessen Koordinaten von null verschieden sind, noch nicht die Konvergenz (oder gar die absolute Konvergenz) im Gebiete $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$. Es gibt also hier eine bedingte Konvergenz nicht nur *am Rande* des Bereiches der absoluten Konvergenz, sondern auch *ganz außerhalb* dieses Bereiches. Eine nähere Untersuchung lehrt

1) Vgl. hierüber das Referat von Stäckel, Fortschr. d. Math. 29, p. 332.

allerdings, daß die Reihe hier nur für einzelne Werte einer der Veränderlichen konvergieren kann, so daß die bedingte Konvergenz der Doppelreihe sich — ähnlich derjenigen der Potenzreihen einer Veränderlichen — nur als von untergeordneter Bedeutung erweist.

Wesentlich anders verhält es sich indessen, wenn man außer der Doppelsumme $\sum\limits_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$ noch die *iterierten Summen* $\sum\limits_{\nu} \left\{ \sum\limits_{\mu} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu \right\}$ sowie $\sum\limits_{\mu} \left\{ \sum\limits_{\nu} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu \right\}$ mit in den Kreis der Betrachtung zieht, welche entstehen, wenn man das vorliegende Aggregat als eine Potenzreihe in bezug auf y auffaßt, deren Koeffizienten Potenzreihen in bezug auf x sind, — und vice versa. Diese iterierten Summen können offenbar sehr wohl in Gebieten konvergieren, in welchen eine Konvergenz der Doppelreihe nicht mehr stattfindet, ja es kann sogar eintreten, daß eine solche Summe für jedes endliche Wertsystem der Veränderlichen konvergiert, ohne daß die Doppelreihe selbst für irgend ein Wertsystem (außer für $x = 0$ und $y = 0$) absolut konvergiert. Es drängt sich daher die Frage auf, welcher Art jene Gebiete sind, in welchem Zusammenhang sie mit dem Bereich der absoluten Konvergenz stehen, und ob die betrachtete Reihe auch hier noch eine reguläre analytische Funktion der beiden Veränderlichen darstellt. Die gleichen Fragen lassen sich dann selbstverständlich auch bezüglich der Diagonalenreihe $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{\lambda} a_\mu^{(\lambda-\mu)} x^\mu y^{\lambda-\mu}$ aufwerfen.

Aber auch wenn man sich ganz auf die Betrachtung der absoluten Konvergenz der Doppelreihe beschränkt, treten noch mancherlei Fragen von grundlegender Wichtigkeit auf. Über das Gebiet der absoluten Konvergenz ist von vornherein nur bekannt, daß es durch zwei Ungleichungen von der Art $|x| < r$, $|y| < r'$ dargestellt werden kann, wo jedoch r und r' nicht notwendig Konstanten, sondern im allgemeinen zwei voneinander abhängige positive Größen bedeuten. Daß diese Abhängigkeit zwischen r und r' nicht vollkommen willkürlicher Natur sein kann, leuchtet ein, und es ist daher wünschenswert, über die Beschränkungen, denen sie unterworfen ist, näheren Aufschluß zu gewinnen. Zu Untersuchungen hierüber bieten sich naturgemäß zwei Wege dar. Erstlich kann man, mit der Doppelreihe selbst operierend, auf mehr rechnerischem Wege zum Ziele zu gelangen suchen; oder aber man geht zur Untersuchung der durch die Doppelreihe definierten analytischen Funktion über und sucht aus der Lagerung ihrer singulären Stellen Anhaltspunkte zu gewinnen. Dies führt nun aber sofort auf eine weitere fundamentale Frage, welche ebenfalls bei den analytischen Funktionen *einer* Veränderlichen noch nicht auftritt: „Was läßt sich über die Lage der singulären Stellen einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen ganz allgemein aussagen?“ Bis jetzt ist in dieser Hinsicht nur die Unmöglichkeit isolierter singulärer Stellen ausgesprochen worden. Da aber bei den bisher näher untersuchten Funktionen

zweier Veränderlichen die Lage der singulären Stellen stets durch eine endliche oder unendlich große Anzahl analytischer Gleichungen von der Form $f(x, y) = 0$ bezeichnet wird, (derart, daß jedes Wertsystem x, y, welches irgend *einer* unter den Gleichungen genügt, eine singuläre Stelle darstellt,) so ist von vornherein zu erwarten, daß sich noch weitergehende Schlüsse allgemeiner Art ziehen lassen müssen.

Auf einige der angedeuteten Fragen habe ich in der vorliegenden Arbeit näher einzugehen versucht. In der ersten Hälfte der Arbeit sind die Fragen mehr vom reihentheoretischen, in der zweiten mehr vom funktionentheoretischen Standpunkt aus behandelt. Die ersten Abschnitte behandeln der Reihe nach die absolute Konvergenz der Doppelreihe, die bedingte Konvergenz derselben, die Konvergenz der iterierten Summen und diejenige der Diagonalenreihe. In dem nächsten Abschnitt folgt dann zuerst eine elementare Herleitung des Laurentschen Satzes für zwei Veränderliche nach der von Herrn Pringsheim eingeführten Methode der Mittelwerte, und daranschließend die Charakterisierung des Bereiches der absoluten Konvergenz der Doppelreihe durch die singulären Stellen der Funktion. Der folgende Abschnitt ist speziell den Untersuchungen über singuläre Stellen gewidmet, der letzte endlich behandelt die Frage, unter welchen Bedingungen sich eine analytische Funktion in einem vorgelegten Gebiete durch eine iterierte Summe der oben bezeichneten Art darstellen läßt.

Es sei mir schließlich an dieser Stelle noch gestattet, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor Dr. A. Pringsheim, auf dessen Anregung hin ich mich mit diesem Gegenstande beschäftigt habe, für sein freundliches Interesse meinen tiefstempfundenen Dank auszusprechen.

I. Bereich der absoluten Konvergenz.

§ 1.

Es möge eine kurze Übersicht derjenigen fundamentalen Sätze über Doppelreihen vorausgeschickt werden, welche für die nachfolgenden Untersuchungen die Grundlage bilden.[1])

Als *Doppelfolge* wird eine zweifach unendliche Folge von Zahlen $b_\mu^{(\nu)}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots.)$ bezeichnet. Dieselbe sei in der Form des Schemas

$$\begin{array}{llll} b_0^{(0)} & b_1^{(0)} & b_2^{(0)} & \ldots. \\ b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & \ldots. \\ b_0^{(2)} & b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

angeordnet gedacht, so daß der *obere* Index ν die *Zeile*, der *untere* μ die *Kolonne* markiert, welcher der Term $b_\mu^{(\nu)}$ angehört.

Die *Doppelfolge* $b_\mu^{(\nu)}$ heißt *konvergent* und B ihr *Grenzwert* (für unabhängig voneinander und gleichzeitig ins Unendliche wachsende μ und ν), in Zeichen

$$\lim_{\mu, \nu = \infty} b_\mu^{(\nu)} = B,$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen m, n existieren, so daß

$$|b_\mu^{(\nu)} - B| \leqq \varepsilon \qquad \text{für} \begin{cases} \mu \geqq m \\ \nu \geqq n \end{cases}.$$

Die unendliche *Doppelreihe* $\sum\limits_{\mu, \nu = 0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)}$ heißt *konvergent*, S ihre *Summe*, in Zeichen

$$\sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)} = S,$$

wenn in dem soeben definierten Sinne

$$\lim_{m, n = \infty} S_m^{(n)} = S$$

---

1) Vgl. A. Pringsheim: Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen. Münch. Ber. 27 (1897) p. 101.

existiert, wo

$$S_m^{(n)} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} u_\mu^{(\nu)}.$$

Ist die Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)}$ *konvergent, so gilt stets*

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} u_\mu^{(\nu)} = 0.$$

Ist außer der Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)} = S$ *jede einzelne Zeile* $\sum_{\mu=0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ *konvergent, so konvergiert auch die Reihe der Zeilensummen gegen* S, *d. h. man hat*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)} \right\} = S.$$

Der analoge Satz gilt für die Reihe der Kolonnensummen. *Jedoch zieht im allgemeinen weder die Konvergenz der Doppelreihe diejenige der Zeilen oder Kolonnen, noch umgekehrt die Konvergenz der Zeilenreihe*[1]) *oder Kolonnenreihe (oder beider) diejenige der Doppelreihe nach sich.*

Die unendliche Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)}$ heißt *absolut konvergent,* wenn die Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ konvergiert. *In einer absolut konvergenten Doppelreihe konvergiert auch jede einzelne Zeile (Kolonne) sowie die Zeilenreihe (Kolonnenreihe) absolut, ebenso die Diagonalenreihe* $\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\lambda} u_\mu^{(\lambda-\mu)}$, *und zwar haben Doppelreihe, Zeilenreihe, Kolonnenreihe und Diagonalenreihe sämtlich die nämliche Summe* S.

Sind in einer Doppelreihe alle Terme $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$, *so zieht die Konvergenz der Zeilenreihe, Kolonnenreihe oder Diagonalenreihe die Konvergenz der Doppelreihe nach sich.*

Bezeichnet man eine konvergente Doppelreihe als *unbedingt konvergent,* wenn jede durch Umordnung der Glieder daraus hervorgehende Doppelreihe gegen dieselbe Summe konvergiert, andernfalls als *bedingt konvergent*[2]), so gilt noch:

Jede absolut konvergente Doppelreihe ist auch unbedingt konvergent, und umgekehrt.

---

1) Die Reihe der Zeilensummen wird im folgenden stets abgekürzt als *„Zeilenreihe"*, analog die Reihe der Kolonnensummen als *„Kolonnenreihe"* bezeichnet.

2) Es sei jedoch ausdrücklich hervorgehoben, daß auch die „Summe" einer nur *bedingt* konvergenten Doppelreihe durch die obigen Festsetzungen eindeutig definiert ist. Auch folgt aus der Konvergenz der Zeilenreihe (Kolonnen- oder Diagonalenreihe) keineswegs auch nur die *bedingte* Konvergenz der Doppelreihe.

Die sämtlichen erwähnten Sätze finden, indem man den Term $u_\mu^{(\nu)}$ durch $a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$ ersetzt, nun auch ihre Anwendung auf die *Potenzreihen zweier Veränderlichen*; dabei bedeuten x und y zwei voneinander unabhängige komplexe Veränderliche[1]), und die Koeffizienten $a_\mu^{(\nu)}$ von x und y unabhängige Größen. Bei der Potenzreihe zweier Veränderlichen hat man also im allgemeinen zu unterscheiden:

1) die *Doppelreihe* $\mathfrak{P}(x,y) = \sum\limits_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$,

welche bedingt oder unbedingt konvergieren kann,

2) die *Zeilenreihe* $P(x,y) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu \right\} y^\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) y^\nu$,

3) die *Kolonnenreihe* $Q(x,y) = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} y^\nu \right\} x^\mu = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} Q_\mu(y) x^\mu$,

4) die *Diagonalenreihe*

$$D(x,y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_\mu^{(\lambda-\mu)} x^\mu y^{\lambda-\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_\mu^{(\lambda-\mu)} \left(\frac{x}{y}\right)^\mu \right\} y^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} D_\lambda\left(\frac{x}{y}\right) y^\lambda,$$

wobei $P_\nu(x)$ und $Q_\mu(y)$ Potenzreihen, $D_\lambda(z)$ eine ganze rationale Funktion λ^{ten} Grades ihres Arguments bedeuten.

Ist die Doppelreihe 1) *absolut konvergent*, so existieren die vier Werte sämtlich und stimmen miteinander überein.

Bezeichnet man daher den Konvergenzradius von $P_\nu(x)$ mit X_ν, den-

1) Jedes Wertsystem (x,y) wird als *Punkt*, x und y als dessen *Koordinaten* bezeichnet. Unter einem „*Bereich* T" der x-Ebene werde im folgenden stets ein *Kontinuum* im Weierstraß'schen Sinne verstanden, d. h. eine Punktmenge von der Beschaffenheit, daß a) jeder Punkt x derselben ein *innerer* Punkt der Menge ist (d. h. daß alle Punkte eines genügend kleinen Kreises mit dem Mittelpunkt x ebenfalls zu T gehören), und daß b) je zwei Punkte von T sich durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke bestehende Linie verbinden lassen, welche ganz in T verläuft. *Begrenzungspunkte* von T sind alsdann lediglich alle diejenigen Häufungsstellen von T, welche nicht selbst zu T gehören. Eine Punktmenge, welche aus einem Bereich T durch Hinzufügung der Begrenzungspunkte hervorgeht, soll fortan ein „*Bereich* B" genannt werden. Die Gesamtheit der Begrenzungspunkte von B (also derjenigen Punkte von B, welche nicht zugleich *innere* Punkte von B sind) ist in der Gesamtheit der Begrenzungspunkte von T enthalten und möge die *Randkurve* C des Bereiches B heißen. Sowohl B als C sind *abgeschlossene* (sogar *perfekte*) Punktmengen. Die analoge Bedeutung mögen die Bereiche B', T' für die y-Ebene besitzen. Endlich möge die Gesamtheit der Punkte (x,y), deren x-Koordinate dem Bereich T (bzw. B), und deren y-Koordinate dem Bereich T' (bzw. B') angehören, als *Bereich* $\mathfrak{T}$ (bzw. $\mathfrak{B}$) bezeichnet werden. Ist speziell T (bzw. B) eine Kreisfläche mit dem Mittelpunkt $x = x_0$ (*ohne* bzw. *mit* Einrechnung der Peripherie), und T' (bzw. B') eine solche mit dem Mittelpunkt $y = y_0$, so soll $\mathfrak{T}$ (bzw. $\mathfrak{B}$) ein *Kreisgebiet* um den Punkt (x_0, y_0) genannt werden.

jenigen von $Q_\mu(y)$ mit Y_μ, sodann mit X die *untere Grenze* aller Größen X_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$), mit Y diejenige der Größen Y_μ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$), so ergibt sich

$$|x| \leqq X, \qquad |y| \leqq Y$$

als *notwendige Bedingung für die absolute Konvergenz von* $\mathfrak{P}(x, y)$, sofern x und y überhaupt von null verschieden sind.

Hieran schließt sich nun der folgende grundlegende Satz:

Konvergiert die Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ *(bedingt oder unbedingt) im Punkte* (x_0, y_0), *dessen Koordinaten von null verschieden seien, so gibt es höchstens eine endliche Anzahl von Zeilen, deren Konvergenzradius kleiner als* $|x_0|$, *sowie höchstens eine endliche Anzahl von Kolonnen, deren Konvergenzradius kleiner als* $|y_0|$ *ist. Die Doppelreihe selbst konvergiert sicher in dem Kreisgebiet* $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ *absolut, wo* ϱ *die kleinere der beiden Größen* $|x_0|$ *und* X, ϱ' *die kleinere der beiden Größen* $|y_0|$ *und* Y *bedeutet.*[1])

Beweis: Aus der Konvergenz der Doppelreihe $\mathfrak{P}(x_0, y_0)$ folgt:

$$\lim_{\mu, \nu = \infty} a_\mu^{(\nu)} x_0^\mu y_0^\nu = 0.$$

Nach Annahme einer beliebigen Größe $g > 0$ existieren mithin zwei Zahlen m, n derart, daß

$$|a_\mu^{(\nu)} x_0^\mu y_0^\nu| \leqq g \qquad \text{für} \begin{cases} \mu \geqq m \\ \nu \geqq n \end{cases}.$$

Sämtliche Zeilen, mit eventuellem Ausschluß der n ersten, besitzen also die Eigenschaft, daß für $x = x_0$ ihre Terme mit wachsendem μ unterhalb einer endlichen Schranke bleiben[2]), und konvergieren mithin für $|x| < |x_0|$ ab-

---

1) Beispiel. $\mathfrak{P}(x, y) = \dfrac{1}{1 - 3xy} + \dfrac{2y}{1 - 2y} + x\dfrac{1 + 4xy}{1 - x}$

$$\begin{aligned} = {} & 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \\ & + 2y + 3xy + 4x^2y + 4x^3y + 4x^4y + \ldots \\ & + (2y)^2 \quad + (3xy)^2 \\ & + (2y)^3 \qquad\quad + (3xy)^3 \\ & + (2y)^4 \qquad\qquad\quad + (3xy)^4 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Für $y_0 = -\frac{1}{4}$, $|x_0| < \frac{4}{3}$ findet Konvergenz statt, und zwar nur bedingte, wenn $1 \leqq |x_0| < \frac{4}{3}$ gewählt wird. Es ist $X = 1$, $Y = \frac{1}{2}$, also $\varrho = 1$, $\varrho' = \frac{1}{4}$ zu setzen. In der Tat findet für $|x| < 1$, $|y| < \frac{1}{4}$ absolute Konvergenz statt, nicht aber durchweg im Gebiete $|x| < 1$, $|y| < \frac{1}{2}$, und niemals bei $|x| \geqq 1$. Natürlich kann man, ohne die Verhältnisse zu modifizieren, noch eine beliebige, in dem ganzen betrachteten Gebiet absolut konvergente Doppelreihe hinzufügen. — Auch wenn x_0 und y_0 der Voraussetzung entsprechend beide von null verschieden sind, kann (im Falle der *bedingten* Konvergenz von $\mathfrak{P}(x_0, y_0)$) X oder Y gleich null sein, wobei dann die Aussage des Satzes naturgemäß ihre Bedeutung verliert. Vgl. des weiteren über diesen Gegenstand den zweiten Abschnitt.

2) Dies ist auch eine unmittelbare Folge von § 2, Satz I der zitierten Abhandlung von A. Pringsheim (a. a. O., p. 116).

solut, d. h.

$$X_\nu \geqq |x_0| \qquad (\nu \geqq n).$$

Analoges gilt für die Kolonnen.

Ferner hat man

$$\sum_{\substack{\mu=m\\ \nu=n}}^{\infty} |a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu| \leqq g \sum_{\substack{\mu=m\\ \nu=n}}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^\mu \cdot \left|\frac{y}{y_0}\right|^\nu \leqq g \frac{|x_0|}{|x_0|-|x|} \cdot \frac{|y_0|}{|y_0|-|y|}$$

$$(|x|<|x_0|, \quad |y|<|y_0|).$$

Es konvergiert daher $\sum_{\substack{\mu=m\\ \nu=n}}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$ *absolut* für $|x|<|x_0|$, $|y|<|y_0|$, die n ersten Zeilen aber, sowie deren Summe sicher für $|x|< X$, ebenso die Summe der m ersten Kolonnen für $|y|< Y$, und mithin die ganze Doppelreihe, sobald alle vier Ungleichungen erfüllt sind, d. h. für $|x|<\varrho$, $|y|<\varrho'$.

Die Aufsuchung der Größen ϱ, ϱ' wird dabei zweckmäßig in der folgenden Weise geschehen: Haben *sämtliche* Zeilen die Eigenschaft, daß ihre Terme für $x = x_0$ mit wachsendem Stellenzeiger μ unterhalb einer endlichen Schranke bleiben, so ist offenbar $X \geqq |x_0|$ und mithin $\varrho = |x_0|$. Ist jenes aber nicht der Fall, so ist $X \leqq |x_0|$, und mithin ϱ gleich dem kleinsten unter den Konvergenzradien derjenigen (ebenfalls nur in endlicher Anzahl vorhandenen) Zeilen, welche jene Eigenschaft *nicht* besitzen. Analog bestimmt sich ϱ' aus den Kolonnen.

Sind *sämtliche* Konvergenzradien $X_\nu \geqq |x_0|$, und *sämtliche* $Y_\mu \geqq |y_0|$, was insbesondere dann eintritt, wenn die Konvergenz von $\mathfrak{P}(x, y)$ in (x_0, y_0) eine absolute ist, so konvergiert $\mathfrak{P}(x,y)$ in dem ganzen Kreisgebiet $|x|<|x_0|$, $|y|<|y_0|$ absolut.

§ 2.

Die Gesamtheit derjenigen Punkte (x, y), in welchen $\mathfrak{P}(x, y)$ absolut konvergiert, nennen wir den *Bereich der absoluten Konvergenz* der Potenzreihe, und stellen uns nunmehr die Aufgabe, seine Gestalt näher zu untersuchen.

Die absolute Konvergenz von $\mathfrak{P}(x, y)$ ist gleichbedeutend mit der Konvergenz der Doppelreihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \alpha_\mu^{(\nu)} |x|^\mu |y|^\nu, \qquad \alpha_\mu^{(\nu)} = |a_\mu^{(\nu)}| \tag{1}$$

und daher nur an die *absoluten Beträge* der beiden Variabeln geknüpft. Es werde x ein spezieller (von null verschiedener) Wert beigelegt, dessen absoluter Betrag r sei.

Die Konvergenz der nur positive Terme enthaltenden Doppelreihe (1) wiederum ist gleichbedeutend mit derjenigen ihrer *Zeilenreihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\sum_{\mu=0}^{\infty}\alpha_{\mu}^{(\nu)}r^{\mu}\right\}|y|^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{\nu}(r)\,|y|^{\nu}.$$

Diese aber ist eine Potenzreihe in bezug auf $|y|$; bezeichnet man mit r' ihren Konvergenzradius, so gilt also:

$\mathfrak{P}(x, y)$ *konvergiert für* $|x| = r$, $|y| < r'$ *absolut, nicht aber für* $|x| = r$, $|y| > r'$. *Dabei ist*

$$\frac{1}{r'}=\overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{p_{\nu}(r)}\ ^{1)}$$

Da $\mathfrak{P}(x, y)$ auch in dem ganzen Gebiet $|x| \leqq r$, $|y| < r'$ absolut konvergiert, nicht aber in dem ganzen Gebiet $|x| \leqq r$, $|y| < r' + \varepsilon$, wie klein auch ε gewählt sei, so läßt sich r' auch folgendermaßen charakterisieren:

r' *ist die größte Zahl, welche die Eigenschaft besitzt, daß* $\mathfrak{P}(x, y)$ *in dem ganzen Gebiete* $|x| \leqq r$, $|y| < r'$ *absolut konvergiert.*

r' heiße der *zu* r *assoziierte Konvergenzradius*, und die Beziehung zwischen r und r' werde ausgedrückt durch die Gleichung

$$r' = \varphi(r),$$

wo $\varphi(r)$ für $0 < r < \infty$ völlig eindeutig definiert ist.

Die Aufgabe, den Konvergenzbereich mittels der *Funktionen* $P_{\nu}(x)$ *selbst* darzustellen, läßt sich nicht ohne weiteres mit der gleichen Präzision lösen. Aus

$$|P_{\nu}(x)| \leqq p_{\nu}(r) \qquad (|x| \leqq r)$$

oder

$$g_{\nu} \leqq p_{\nu}(r),$$

wo g_{ν} das Maximum von $|P_{\nu}(x)|$ für $|x| \leqq r$ bedeutet, folgt nämlich

$$\overline{\lim}\sqrt[\nu]{g_{\nu}} \leqq \frac{1}{r'}$$

oder

$$r'' \geqq r'$$

wenn

$$\frac{1}{r''} = \overline{\lim}\sqrt[\nu]{g_{\nu}}$$

definiert wird. Obwohl nun r' die größte Zahl ist, für welche das Gebiet $|x| \leqq r$, $|y| < r'$ dem Konvergenzbereich noch vollständig angehört, so *findet doch noch in dem Kreisgebiet*

$$|x| < r, \quad |y| < r''$$

---

1) Jedoch ist $\frac{1}{r'} = \infty$ zu setzen, falls für *irgend einen* Wert von ν $p_{\nu}(r) = \infty$ ist, was niemals bei $r < X$, möglicherweise jedoch bei $r = X$ und stets bei $r > X$ eintritt.

(wenn auch nicht mehr notwendig für $|x| = r$,) *absolute Konvergenz statt*[1]), *und es gilt daher die Beziehung*

$$\varphi(r-\varepsilon) \geqq r'' \geqq \varphi(r) \tag{2}$$

wie klein auch $\varepsilon > 0$ *gewählt wird.*

Nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz ist nämlich, wenn $r < X$,

$$\alpha_\mu^{(\nu)} \leqq g_\nu \cdot r^{-\mu}$$

und daher, solange $\varrho < r$,

$$p_\nu(\varrho) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_\mu^{(\nu)} \varrho^\mu \leqq g_\nu \cdot \frac{r}{r-\varrho}$$

und mithin konvergiert

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(\varrho) \cdot |y|^\nu \leqq \frac{r}{r-\varrho} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu |y|^\nu$$

für $|y| < r''$.

Um diese zwei verschiedenen Kriterienformen in eine engere Beziehung zueinander zu bringen, erweist sich eine genauere Diskussion der Relation $r' = \varphi(r)$ als notwendig.

§ 3.

r' wurde für jedes $r > 0$ definiert als die größte Zahl, für welche in dem ganzen Gebiet $|x| \leqq r$, $|y| < r'$ absolute Konvergenz stattfindet, und es galt

$$\frac{1}{r'} = \overline{\lim}\, \sqrt[\nu]{p_\nu(r)}.$$

Für jeden Wert von r ist natürlich

$$0 \leqq \varphi(r) \leqq Y$$

und speziell gilt

$$\varphi(r) = 0 \qquad \text{für } r > X$$

wo X (bzw. Y) wie bisher die untere Grenze der Konvergenzradien sämtlicher Zeilen (bzw. Kolonnen) bezeichnet.[2]) Endlich folgt aus der Bedeutung von r':

$$\varphi(r_1) \geqq \varphi(r_2) \qquad \text{wenn } r_1 < r_2. \tag{3}$$

Wir bezeichnen mit R die untere Grenze aller derjenigen Werte

---

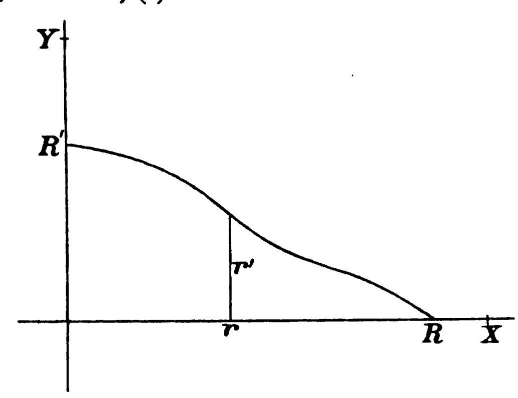
1) Jedoch ist r'' nicht unter allen Umständen auch die *größte* Zahl, welche diese Eigenschaft besitzt, wie das Beispiel $P_\nu(x) = x^{\nu^2}$ bei $r = 1$ lehrt. Tatsächlich kommt aber, wie sich nachher erweisen wird, r'' diese Eigenschaft zu, solange $\varphi(r+0) > 0$ ist, und zwar ist dann $r'' = r'$.

2) X und Y können unendlich groß sein. (Beispiele: Reihe für $\frac{1}{1-xy}$ und für e^{x+y}.)

von r, für welche $\varphi(r) = 0$ ist, so daß stets

$$0 \leqq R \leqq X$$

und, wegen (3), $\varphi(r) = 0$ für $r > R$.



Ferner ist $\varphi(0)$ zwar nicht selbst definiert, jedoch existiert wegen der Monotonie von $\varphi(r)$ ein Grenzwert $\varphi(+0)$, welchen wir mit R' bezeichnen wollen, so daß auch

$$0 \leqq R' \leqq Y$$

gilt.[1])

Wir wollen nunmehr den Nachweis führen, daß *die Funktion* $\varphi(r)$ *im Intervall* $0 < r < R$ *stetig ist*[2]), schicken zu diesem Zwecke jedoch den folgenden Hilfssatz voraus.

Es bedeute $p(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu x^\mu$ eine Potenzreihe mit positiven Koeffizienten ($c_\mu \geqq 0$), betrachtet für *positive* Werte ihres Argumentes, *welche dem Konvergenzbereiche noch angehören*, so daß im folgenden durchweg $p(x) > 0$ ist. Es gilt alsdann:

Ist $k > 1$, *so nimmt die Funktion*

$$\frac{p(kx)}{p(x)}$$

mit wachsendem x *niemals ab.*

Hierzu genügt der Nachweis, daß ihre logarithmische Ableitung

$$\frac{kp'(kx)}{p(kx)} - \frac{p'(x)}{p(x)} \geqq 0$$

oder auch

$$\frac{kx \cdot p'(kx)}{p(kx)} - \frac{x \cdot p'(x)}{p(x)} \geqq 0$$

---

1) R kann unendlich groß sein, vorausgesetzt, daß auch X es ist. (Vgl. die Beispiele der vorigen Fußnote.) Andererseits kann tatsächlich $R < X$ sein. Setzt man z. B. $P_\nu(x) = (x + x^2 + x^3 + \ldots)^{\nu^2}$, so wird $X = 1$, $R = \frac{1}{2}$. — Das Analoge gilt von R'.

2) Wie mir erst unmittelbar vor der Drucklegung bekannt wird, ist dies schon von den Herren A. Meyer und Phragmén bewiesen worden. Stockh. Öfv. 40 (1883).

ist, d. h. daß die Funktion $\frac{x \cdot p'(x)}{p(x)}$ mit wachsendem x niemals abnimmt, oder endlich daß der Ausdruck

$$p(x)p'(x) + xp(x)p''(x) - xp'^2(x) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} c_\mu c_\nu \{ \nu + \nu(\nu-1) - \mu\nu \} x^{\mu+\nu-1}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\lambda} c_{\lambda-\nu} \cdot c_\nu \cdot \nu(2\nu - \lambda) \right\} x^{\lambda-1}$$

beständig positiv ist. In der Tat ist jeder seiner Koeffizienten positiv; denn man hat, gleichgültig ob λ gerade ($= 2\sigma$) oder ungerade ($= 2\sigma - 1$) ist,

$$\sum_{\nu=\sigma}^{\lambda} c_{\lambda-\nu} c_\nu \cdot \nu(2\nu - \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\sigma-1} c_\nu c_{\lambda-\nu} (\lambda - \nu)(\lambda - 2\nu)$$

und folglich

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda} c_{\lambda-\nu} c_\nu \cdot \nu(2\nu - \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\sigma-1} c_{\lambda-\nu} \cdot c_\nu (\lambda - 2\nu)^2 \geqq 0.$$

Um nun zu dem angekündigten Beweise überzugehen, sei mit $r = r_0$ irgend ein Wert des Intervalles $0 < r < R$ bezeichnet. Wegen der Monotonie der Funktion $\varphi(r)$ existieren alsdann außer dem eindeutig definierten $\varphi(r_0)$ bestimmte Werte $\varphi(r_0 - 0)$ und $\varphi(r_0 + 0)$, so daß es sich höchstens um „*Unstetigkeiten erster Art*" handeln kann. Dabei gilt unter allen Umständen wegen (3):

$$\varphi(k^{-1} r_0) \geqq \varphi(r_0 - 0) \geqq \varphi(r_0) \geqq \varphi(r_0 + 0) \geqq \varphi(k r_0)$$

wenn $k > 1$ beliebig gewählt wird. Zur Abkürzung werde

$$\varphi(r_0 - 0) = \frac{1}{a_0}, \quad \varphi(r_0) = \frac{1}{b_0}, \quad \varphi(r_0 + 0) = \frac{1}{c_0}$$

gesetzt, so daß

$$\overline{\lim} \sqrt[\nu]{p_\nu(k^{-1} r_0)} \leqq a_0 \leqq b_0 \leqq c_0 \leqq \overline{\lim} \sqrt[\nu]{p_\nu(k r_0)}$$

und

$$b_0 = \overline{\lim} \sqrt[\nu]{p_\nu(r_0)}.$$

Es werde nun, entgegen der Behauptung,

$$\varphi(r_0 - 0) > \varphi(r_0) \qquad \text{d. h.} \quad a_0 < b_0$$

angenommen, und es mögen zwei positive Größen a und b so gewählt werden, daß

$$a_0 < a < b < b_0.$$

Da nun $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{p_\nu(k^{-1} r_0)} \leqq a_0$, so gilt nach Ausschluß einer *endlichen* Anzahl von Werten ν:

$$p_\nu(k^{-1} r_0) \leqq a^\nu.$$

Andererseits gibt es unendlich viele Werte von ν, für welche

$$p_\nu(r_0) \geqq b^\nu$$

und folglich auch unendlich viele Werte von ν, für welche *beide* Ungleichungen statt haben. Wird ν auf Werte dieser letzteren Art beschränkt, so gilt also die Ungleichung

$$\frac{p_\nu(kx)}{p_\nu(x)} \geqq \left(\frac{b}{a}\right)^\nu$$

für $x = k^{-1}r_0$, und somit nach dem Hilfssatz auch für $x > k^{-1}r_0$. Legt man x der Reihe nach die Werte $r_0, kr_0, k^2r_0, \ldots$ bei, so ergibt sich infolgedessen:

$$p_\nu(kr_0) \geqq p_\nu(r_0)\left(\frac{b}{a}\right)^\nu \geqq b^\nu \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^\nu$$

$$p_\nu(k^2r_0) \geqq p_\nu(kr_0)\left(\frac{b}{a}\right)^\nu \geqq b^\nu \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_\nu(k^\alpha r_0) \geqq b^\nu \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha\nu}.$$

Wir wählen nun für k eine Reihe von Werten $k, k^{\frac{1}{2}}, k^{\frac{1}{3}}, \ldots$, deren erster beliebig (jedoch > 1) angenommen sei. Jedem dieser Werte entsprechen bei der obigen Schlußweise *unendlich viele* Werte von ν, von denen jedoch jedesmal nur *einer* herausgegriffen werde, doch so, daß eine Reihe von *wachsenden* Werten $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots$. erhalten wird. Alsdann ergibt sich, wenn man von den vorstehenden Ungleichungen sukzessive nur die erste, die zweite, die dritte, ... benutzt:

$$p_{\nu_1}(kr_0) \geqq b^{\nu_1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\nu_1}$$

$$p_{\nu_2}\left((k^{\frac{1}{2}})^2 r_0\right) = p_{\nu_2}(kr_0) \geqq b^{\nu_2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{\nu_\alpha}\left((k^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha r_0\right) = p_{\nu_\alpha}(kr_0) \geqq b^{\nu_\alpha}\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha\nu_\alpha}$$

und folglich

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{p_\nu(kr_0)} \geqq \overline{\lim_{\alpha=\infty}}\, b \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha = \infty$$

d. h.

$$\varphi(kr_0) = 0$$

für jedes $k > 1$, was aber dem Umstand widerspricht, daß $\varphi(kr_0) > 0$, solange $kr_0 < R$.

Zu dem nämlichen Widerspruch führt aber auch die Annahme

$$\varphi(r_0) > \varphi(r_0 + 0), \qquad \text{d. h.} \quad b_0 < c_0.$$

Wählt man nämlich zwei positive Größen b und c nunmehr so, daß

$$b_0 < b < c < c_0$$

so gibt es nach Annahme von $k > 1$ stets unendlich viele Werte von ν, für welche gleichzeitig

$$p_\nu(r_0) \leqq b^\nu, \quad p_\nu(kr_0) \geqq c^\nu$$

so daß

$$\frac{p_\nu(kx)}{p_\nu(x)} \geqq \left(\frac{c}{b}\right)^\nu$$

für $x = r_0$ und folglich auch für $x > r_0$. Legt man daher x der Reihe nach die Werte kr_0, $k^2 r_0$, ... bei, so ergibt sich

$$p_\nu(k^\alpha r_0) \geqq c^\nu \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^{(\alpha-1)\nu} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Substituiert man nun wieder für k sukzessive die Werte $k, k^{\frac{1}{2}}, k^{\frac{1}{3}}, \ldots$, bestimmt entsprechend eine Reihe von wachsenden Werten $\nu_1, \nu_2, \ldots$, und benutzt sukzessive die erste, zweite, ... der vorstehenden Ungleichungen, so ergibt sich

$$p_{\nu_\alpha}\left((k^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha r_0\right) = p_{\nu_\alpha}(kr_0) \geqq c^{\nu_\alpha}\left(\frac{c}{b}\right)^{(\alpha-1)\nu_\alpha} \atop (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

und folglich

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{p_\nu(kr_0)} \geqq \overline{\lim_{\alpha=\infty}}\, c \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^{\alpha-1} = \infty$$

d. h.

$$\varphi(kr_0) = 0$$

für jedes $k > 1$.[1])

Somit ist $\varphi(r)$ *für* $r > 0$ *überall stetig, außer eventuell im Punkt* $r = R$, wo die drei Werte $\varphi(R-0)$, $\varphi(R)$, $\varphi(R+0)$ nicht übereinzustimmen brauchen.[2])

§ 4.

Folgerungen.

Nach § 2, Gleichung (2) gilt, solange $0 < r < X$,

$$\varphi(r-\varepsilon) \geqq r'' \geqq \varphi(r)$$

wie klein auch $\varepsilon > 0$ gewählt sei. Da nun

$$\varphi(r-0) = \varphi(r), \qquad (0 < r < R)$$

1) Durch das gleiche Verfahren läßt sich auch direkt die Übereinstimmung der Werte $\varphi(r_0 - 0)$ und $\varphi(r_0 + 0)$ nachweisen, so daß schon die *einmalige* Anwendung desselben ausreicht. Der größeren Übersichtlichkeit wegen wurde der obige Weg eingeschlagen.

2) Beispiel. Ist $P_\nu(x) = (x + x^2 + x^3 + \cdots)^{\nu^2}$, so hat man $R = \frac{1}{2}$, $\varphi(R-0) = \infty$, $\varphi(R) = 1$, $\varphi(R+0) = 0$.

so ergibt sich durch Grenzübergang

$$r'' = \varphi(r) \qquad (0 < r < R)$$

d. h.

$$\overline{\lim}\sqrt[\nu]{g_\nu} = \overline{\lim}\sqrt[\nu]{p_\nu(r)}$$

und es gilt somit:

Ist $0 < r < R$, so wird der größte Wert r', für welchen das Kreisgebiet $|x| \leqq r$, $|y| < r'$ dem Bereich der absoluten Konvergenz noch vollständig angehört, bestimmt durch

$$\frac{1}{r'} = \overline{\lim}\sqrt[\nu]{g_\nu} = \overline{\lim}\sqrt[\nu]{p_\nu(r)}$$

wo

$$g_\nu = \underset{|x|=r}{\mathrm{Max}}\left|\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu\right|, \qquad p_\nu(r) = \sum_{\mu=0}^{\infty} |a_\mu^{(\nu)}|\, r^\mu.$$

Der Satz behält seine Gültigkeit bei, wenn darin $|x| \leqq r$ durch $|x| < r$ ersetzt wird. Denn soll $\mathfrak{P}(x, y)$ in einem Gebiete $|x| < r$, $|y| < \varrho'$ absolut konvergieren, d. h. im Gebiete $|x| \leqq r - \varepsilon$, $|y| < \varrho'$, wie klein auch $\varepsilon > 0$ gewählt sei, so muß

$$\varrho' \leqq \varphi(r - \varepsilon)$$

und somit

$$\varrho' \leqq \varphi(r - 0) = \varphi(r) = r'$$

sein; im Gebiet $|x| < r$, $|y| < r'$ findet aber sicher absolute Konvergenz statt.

$\varphi(r)$ kann in dem ganzen Intervall $0 < r < R$ oder auch längs einer Teilstrecke[1]) konstant sein; es gilt jedoch:

$\varphi(r)$ kann für $0 < r < R$ höchstens längs einer einzigen, und zwar mit $r = 0$ beginnenden Teilstrecke konstant sein.

Hat nämlich $\varphi(r)$ längs irgend eines Intervalles $r_0 \leqq r \leqq r_1$ $(0 < r_0 < r_1 < R)$ einen konstanten Wert r_0', und bezeichnet $\psi(r')$ bei gegebenem $r' > 0$ die größte positive Zahl, für welche das Gebiet $|y| < r'$, $|x| < \psi(r')$ dem Bereich der absoluten Konvergenz noch angehört, so ist einerseits

$$\psi(r_0' + \delta) < r_0 \qquad (\delta > 0),$$

da andernfalls die Potenzreihe im Gebiet $|x| < r_0$, $|y| < r_0' + \delta$ absolut

---

1) Beispiel: $\mathfrak{P}(x, y) = \dfrac{1}{(1 - x)(1 - y)} + \dfrac{1}{1 - 2xy}$; $P_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} x^\mu + (2x)^\nu$

$$\varphi(r) = 1 \quad \text{für} \quad 0 < r \leqq \tfrac{1}{2}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{2r} \quad „ \quad \tfrac{1}{2} \leqq r < 1$$

$$\varphi(r) = 0 \quad „ \quad 1 \leqq r.$$

konvergieren müßte, andererseits aber offenbar

$$\psi(r_0') \geqq r_1.$$

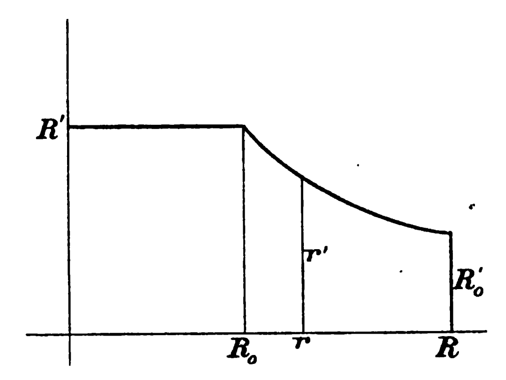
Da δ beliebig kleiner Werte fähig ist, so bedeutet dies für die Funktion $\psi(r')$ eine Unstetigkeit an der Stelle $r' = r_0'$; $\psi(r')$ kann aber als Funktion von analogen Eigenschaften wie $\varphi(r)$ höchstens an der Stelle $r' = R'$ unstetig sein, und r_0' muß daher notwendig mit R' zusammenfallen.

Mit R_0 sei der größte Wert von r bezeichnet, für welchen $\varphi(r) = R'$ ist. ($R_0 = 0$, falls für *jeden* positiven Wert von r $\varphi(r) < R'$.) Wird alsdann r auf das Intervall $R_0 \leqq r < R$ beschränkt, und bezeichnet man wieder den zugehörigen Wert von $\varphi(r)$ mit r', so *gilt auch umgekehrt*

$$\psi(r') = r.$$

Denn aus $r' = \varphi(r)$ ergibt sich zunächst $\psi(r') \geqq r$; wäre aber $\psi(r')$ etwa gleich $r + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, so würde daraus $\varphi(r + \varepsilon) \geqq r'$ folgen, während in Wahrheit $\varphi(r + \varepsilon) < r'$ ist.

Um nun die volle Symmetrie herzustellen, möge im Falle $r = R$ jede beliebige positive Zahl, welche dem Intervall $\varphi(R-0) = R_0'$ bis $\varphi(R+0) = 0$



angehört, als ein zu r assoziierter Radius r' angesehen werden. Durch die Gesamtheit der Wertpaare r, r' wird alsdann ein stetiger Linienzug dargestellt, welcher die beiden Punkte $r = 0$, $r' = R'$ und $r = R$, $r' = 0$ miteinander verbindet, zu Beginn des Verlaufes der r-Achse, zum Schluß der r'-Achse parallel laufen kann, während im ganzen übrigen Verlaufe r' beständig abnimmt, wenn r zunimmt, und umgekehrt. Die Kurve wird, wie sich leicht nachweisen läßt, von jedem vom Anfangspunkt ausgehenden Strahl $r = kr'$ $(k > 0)$ in einem und nur einem Punkt geschnitten und besitzt ferner die folgende Eigenschaft:

Sind r, r' die Koordinaten eines beliebigen Kurvenpunkts (d. h. ein Paar assoziierter Radien), so konvergiert die Potenzreihe in jedem Punkte

des Gebiets $|x| < r$, $|y| < r'$ *absolut, dagegen in keinem Punkte des Gebiets* $|x| > r$, $|y| > r'$.[1])

Durch diese Eigenschaft ist aber die Kurve ebenfalls vollständig charakterisiert; denn sind r und r' die Koordinaten eines nicht der Kurve angehörenden Punktes, so verliert sicher eine der beiden Aussagen ihre Gültigkeit.

Die Größen R, R' können etwa als die *Maximal-*, R_0, R_0' als die *Minimalradien* des Bereiches der absoluten Konvergenz bezeichnet werden.

§ 5.

Wir wollen nun noch an die zuletzt gegebene (symmetrische) Definition für die Abhängigkeit zwischen r und r' anknüpfen, um von ihr aus auch zu symmetrischen analytischen Darstellungen dieser Abhängigkeit zu gelangen.

Bezeichnet man mit

$$\delta_\lambda(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} \alpha_\mu^{(\lambda-\mu)} x^\mu y^{\lambda-\mu}$$

eine Diagonale der Doppelreihe $\sum_{\mu, \nu} \alpha_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$, $(\alpha_\mu^{(\nu)} = |a_\mu^{(\nu)}|)$, so sind die Punkte (r, r') unserer Kurve dadurch gekennzeichnet, daß die Summe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \delta_\lambda(\varkappa r, \varkappa r') = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \varkappa^\lambda \delta_\lambda(r, r')$$

für $\varkappa < 1$ konvergieren, für $\varkappa > 1$ divergieren muß. Es besitzt also die durch den letzten Ausdruck dargestellte Potenzreihe in $\varkappa$ notwendig den Konvergenzradius 1, und dies liefert die gesuchte *Beziehung zwischen* r *und* r':

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\delta_\lambda(r, r')} = 1.$$

---

1) Die Bedeutung der Kurve läßt sich ausführlicher wie folgt ausdrücken: Ist (x_0, y_0) ein völlig beliebiger Punkt, dessen Koordinaten beide nicht null sind, und wird $|x_0| = \varrho$, $|y_0| = \varrho'$ gesetzt, so gibt es nach Obigem stets einen und nur einen Kurvenpunkt, welcher die Koordinaten $\lambda\varrho$, $\lambda\varrho'$ besitzt, unter λ eine positive Konstante verstanden. Alsdann findet absolute Konvergenz statt: 1. wenn $\lambda > 1$ ist, im Punkte (x_0, y_0), sowie in der ganzen Umgebung desselben; 2. wenn $\lambda < 1$ ist, weder im Punkt (x_0, y_0) noch in der Umgebung desselben; 3. wenn $\lambda = 1$ ist

a) in allen Punkten (x, y) für welche $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$,
jedoch in keinem Punkte, für welchen $|x| > |x_0|$, $|y| > |y_0|$;

b) falls $\varrho < R$, noch in allen Punkten $|x| = |x_0|$, $|y| < |y_0|$,
jedoch in keinem Punkte $|x| = |x_0|$, $|y| > |y_0|$;

c) falls $\varrho' < R'$, noch in allen Punkten $|x| < |x_0|$, $|y| = |y_0|$,
jedoch in keinem Punkte $|x| > |x_0|$, $|y| = |y_0|$.

Dieselbe kann noch auf andere Formen gebracht werden. Bezeichnet man nämlich mit A_λ den größten der $\lambda+1$ Terme von $\delta_\lambda(r, r')$, so hat man

$$A_\lambda \leqq \delta_\lambda(r, r') \leqq (\lambda+1) A_\lambda$$

und daher

$$\overline{\lim} \sqrt[\lambda]{A_\lambda} \leqq \overline{\lim} \sqrt[\lambda]{\delta_\lambda(r, r')} \leqq \overline{\lim} \sqrt[\lambda]{(\lambda+1) A_\lambda}.$$

Da aber die beiden äußeren Ausdrücke dem Werte nach übereinstimmen, so gilt beide Male das Gleichheitszeichen, und man erhält so die zweite Darstellung:

$$\overline{\lim} \sqrt[\lambda]{A_\lambda} = 1.$$

Endlich kann man offenbar noch $\overline{\lim} \sqrt[\lambda]{A_\lambda}$ durch die obere Unbestimmtheitsgrenze der *sämtlichen* Größen $\sqrt[\mu+\nu]{\alpha_\mu^{(\nu)} r^\mu r'^\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ ersetzen, die wir mit $\overline{\lim}_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_\mu^{(\nu)} r^\mu r'^\nu}$ bezeichnen können.[1]) So ergibt sich die dritte Darstellung

$$\overline{\lim}_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_\mu^{(\nu)} r^\mu r'^\nu} = 1.\text{[2])}$$

Es ist für die praktische Anwendung der Formeln bequemer, in ihnen r und r' als Funktionen eines Parameters erscheinen zu lassen. Man erreicht dies, sofern $r' > 0$ angenommen wird, durch Einführung des Parameters $k = \frac{r}{r'}$ und erhält so, da einerseits

$$\overline{\lim} \sqrt[\lambda]{\delta_\lambda(kr', r')} = \overline{\lim} \sqrt[\lambda]{r'^\lambda \delta_\lambda(k, 1)} = r' \cdot \overline{\lim} \sqrt[\lambda]{d_\lambda(k)}$$

wo

$$d_\lambda(k) = \delta_\lambda(k, 1) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} \alpha_\mu^{(\nu)} k^\mu,$$

und andererseits

$$\overline{\lim}_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_\mu^{(\nu)} k^\mu r'^{\mu+\nu}} = r' \overline{\lim}_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_\mu^{(\nu)} k^\mu}$$

---

1) Dieser obere Limes $\overline{\lim}_{\mu+\nu=\infty} b_\mu^{(\nu)}$ der sämtlichen Elemente einer Doppelfolge $b_\mu^{(\nu)}$, welcher auch als oberer Limes der in eine *einfach* unendliche Reihe umgeordneten Elemente $b_\mu^{(\nu)}$ aufgefaßt werden kann, ist nicht zu verwechseln mit dem von A. Pringsheim (Math. Ann. 53 (1899), p. 294), sowie von F. London (Ebenda, p. 325) präzisierten Begriff des *oberen Doppellimes* $\overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} b_\mu^{(\nu)}$ (auch *obere Unbestimmtheitsgrenze der Doppelfolge* genannt). Ist z. B. $b_\mu^{(\nu)} = 1$ für $\nu = 0$, dagegen $b_\mu^{(\nu)} = 0$ für $\nu > 0$, so hat ersterer den Wert 1, letzterer den Wert 0. Über den Zusammenhang zwischen beiden vgl. § 9, p. 27, Fußnote.

2) Für den Fall $r = r'$ bereits von O. Biermann angegeben. Monatsh. f. Math. u. Phys. 8 (1897) p. 124; Math. Ann. 48 (1897) p. 395. — Über eine weitere Modifikation dieser Darstellung vgl. § 9, p. 27. Zu bemerken ist noch, daß die Formeln für $r = 0$ als zugehörigen Wert von r' nicht etwa den Maximalradius R', sondern den Konvergenzradius Y_0 der ersten Kolonne liefern; analog für $r' = 0$.

die Gleichungen der Kurve in den beiden folgenden Gestalten:[1])

$$\frac{1}{r'} = \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{d_\lambda(k)}, \qquad \frac{1}{r'} = \overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{a_{\mu}^{(\nu)} k^{\mu}}$$

$$r = kr'.$$

§ 6.

Es seien schließlich in aller Kürze noch einige Sätze über absolut konvergente Potenzreihen angeführt, welche zwar mit den bisherigen Untersuchungen in keinem näheren Zusammenhang stehen, von denen jedoch später gelegentlich Gebrauch zu machen sein wird.

Es sei $\mathfrak{P}(u, v)$ eine Potenzreihe, von welcher bekannt sei, daß sie im Gebiete $|u| < r$, $|v| < r'$ absolut konvergiere. Ebenso seien

$$u = \varphi(x, y) \qquad v = \psi(x, y)$$

zwei in einer gewissen Umgebung des Nullpunkts absolut konvergente Potenzreihen, deren konstantes Glied mit u_0 bezw. v_0 bezeichnet werden möge. Gilt alsdann

$$|u_0| < r, \qquad |v_0| < r'$$

so *existiert eine Potenzreihe* $\overline{\mathfrak{P}}(x, y)$, *welche die Eigenschaft hat, in einem gewissen Kreisgebiet um den Nullpunkt absolut zu konvergieren und daselbst mit* $\mathfrak{P}(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ *übereinzustimmen.*

Der Beweis wird mittels derselben Hilfsmittel wie bei dem entsprechenden Satz über die Potenzreihen *einer* Veränderlichen geführt.[2])

Ist speziell $u = u_0 + x$, $v = v_0 + y$, so konvergiert $\overline{\mathfrak{P}}(x, y)$ im Gebiet $|x| < r - |u_0|$, $|y| < r' - |v_0|$ absolut und stimmt daselbst mit $\mathfrak{P}(u_0 + x, v_0 + y)$ überein. Jede Potenzreihe $\mathfrak{P}(u, v)$ läßt sich demnach, wenn u_0, v_0 ein *innerer* Punkt des Konvergenzbereiches ist — so daß also $|u_0| < r$, $|v_0| < r'$, wo r, r' ein Paar assoziierter Radien — nach Potenzen von $u - u_0$, $v - v_0$ umordnen, und konvergiert alsdann sicher absolut, solange

$$|u - u_0| < r - |u_0|, \qquad |v - v_0| < r' - |v_0|.$$

Konvergiert eine Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ *in jedem Punkt eines Bereiches* $\mathfrak{B}$[3]) *absolut, so konvergiert sie in demselben auch gleichmäßig.*

(Beweis durch Vergleichung mit der absolut konvergenten Doppelreihe $\sum\limits_{\mu,\nu=0}^{\infty} |a_{\mu}^{(\nu)}| \varrho^{\mu} \varrho'^{\nu}$, wo ϱ das Maximum sämtlicher Werte $|x|$ des

---

1) Auf die zweite derselben gelangt E. Lemaire, Bull. des sciences math. (2) 20 (1896), p. 286. — Auch aus diesen Formeln läßt sich die Stetigkeit von r und r' in bezug auf k erweisen; dieselbe würde jedoch umgekehrt keinen Schluß bezüglich der Stetigkeit der Funktion $\varphi(r)$ zulassen.

2) Vgl. hierzu auch Stolz, Arithmetik I, Leipzig 1885, p. 295.

3) S. p. 3, Fußnote.

Bereiches B, ϱ' das Maximum sämtlicher Werte $|y|$ des Bereiches B' bedeutet.)

Konvergiert die Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ absolut in der Umgebung des Nullpunkts (d. h. in irgend einem Punkte (x_0, y_0), dessen Koordinaten nicht null sind), so ist ihre Summe eine im Nullpunkt stetige Funktion.

Denn ist eine Größe $\varepsilon > 0$ gegeben, bezeichnet ferner ϱ eine positive Zahl unterhalb $|x_0|$ und $|y_0|$, und setzt man

$$G = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\lambda} |a_{\mu}^{(\lambda-\mu)}| \varrho^{\lambda-1}$$

so ist, wenn man noch δ unterhalb ϱ und $\frac{\varepsilon}{G}$ beliebig annimmt, für alle $|x| < \delta$, $|y| < \delta$ die Bedingung

$$|\mathfrak{P}(x, y) - a_0^{(0)}| < \varepsilon$$

erfüllt.

Hieraus folgt noch:

Ist $a_0^{(0)} \neq 0$, so gibt es stets eine Größe $\delta > 0$, derart daß

$$|\mathfrak{P}(x, y)| > 0,$$

solange $|x| < \delta$, $|y| < \delta$.

II. Stellen bedingter Konvergenz.

§ 7.

Konvergiert die Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ (bedingt oder unbedingt) in einem Punkte (x_0, y_0), dessen Koordinaten von null verschieden sind, so gibt es nach dem in § 1 bewiesenen Satze zwei Zahlen m, n derart, daß

$$X_\nu \geqq |x_0| \quad \text{für } \nu \geqq n$$
$$Y_\mu \geqq |y_0| \quad \text{„} \ \mu \geqq m$$

wo X_ν den Konvergenzradius von $P_\nu(x)$, Y_μ denjenigen von $Q_\mu(y)$ bedeutet. Es ergibt sich somit für die bedingte Konvergenz im Punkte (x_0, y_0) zunächst die *notwendige Bedingung*:

$$|x_0| \leqq \underline{\lim}_{\nu=\infty} X_\nu, \qquad |y_0| \leqq \underline{\lim}_{\mu=\infty} Y_\mu.$$

Um weitere notwendige Bedingungen aufzustellen, wollen wir, wenn (x_0, y_0) eine Stelle bedingter Konvergenz bedeutet, deren Koordinaten, wie wir auch in der Folge stets annehmen, von null verschieden sind, folgende vier Möglichkeiten auseinanderhalten:

a)	$\lvert x_0\rvert \leqq X$	$\lvert y_0\rvert \leqq Y$
b)	$\lvert x_0\rvert > X$	$\lvert y_0\rvert \leqq Y$
c)	$\lvert x_0\rvert \leqq X$	$\lvert y_0\rvert > Y$
d)	$\lvert x_0\rvert > X$	$\lvert y_0\rvert > Y$

Dabei soll, wie früher, X die *untere Grenze* aller Größen X_ν, Y diejenige aller Y_μ bedeuten.[1])

Die Anwendung des oben erwähnten Satzes ergibt alsdann weiter folgendes:

Im Falle a) konvergiert $\mathfrak{P}(x, y)$ in dem ganzen Gebiet $|x| \leqq |x_0|$, $|y| \leqq |y_0|$ *absolut*; *die Stelle* (x_0, y_0) *kann sich demnach nur am Rande des Bereiches der absoluten Konvergenz befinden.*

Im Falle b) konvergiert $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiet $|x| < X$, $|y| < |y_0|$ absolut; mit andern Worten es muß nach der angenommenen Bezeichnungs-

1) X und Y können auch gleich 0 sein.

weise (§ 4) der *Maximalradius* der x-Ebene $R = X$ und der *Minimalradius* der y-Ebene $R_0' \geqq |y_0|$ sein.

Im Falle c) muß analog:

$$R' = Y, \qquad R_0 \geqq |x_0|.$$

Im Falle d) endlich konvergiert $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiet $|x| < X$, $|y| < Y$ absolut; infolgedessen muß $R_0 = R = X$, $R_0' = R' = Y$ sein, d. h. der (wahre) Bereich der absoluten Konvergenz ist das volle Kreisgebiet $|x| < X$, $|y| < Y$.[1])

Den Fall a), bei welchem es sich nur um den Rand des Bereiches der absoluten Konvergenz handelt, lassen wir zunächst außer Betracht, und knüpfen an den Fall $|x_0| > X$ weitere Überlegungen an, so daß die folgenden Ausführungen sowohl in dem Fall b) wie in dem Fall d) Geltung haben.

Aus der bedingten Konvergenz in (x_0, y_0) folgt (p. 5) die absolute Konvergenz der Doppelreihe

$$\sum_{\substack{\mu=m\\ \nu=n}}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$$

im Gebiet $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$. Unter den n ersten Zeilen hingegen müssen sich, da $X < |x_0|$, solche befinden, deren Konvergenzradius $X_\nu < |x_0|$ ist. Es seien, in wachsender Reihe geordnet, $\nu = \alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ diejenigen Indizes, für welche dies eintritt. Alsdann gilt:

Der Konvergenzradius des als Potenzreihe in x aufgefaßten Ausdrucks

$$y_0^\alpha P_\alpha(x) + y_0^\beta P_\beta(x) + \cdots + y_0^\varkappa P_\varkappa(x)$$

ist mindestens gleich $|x_0|$. (Die Anzahl der Werte $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ muß also größer als 1 sein.)

Beweis. Bezeichnet man

$$\sum_{\mu=0}^{p} \sum_{\nu=0}^{q} a_\mu^{(\nu)} x_0^\mu y_0^\nu = S_p^{(q)}$$

so konvergiert die Doppelfolge $S_p^{(q)}$. Ist S ihr Grenzwert, so existieren mithin zwei Zahlen M, N, derart, daß

$$|S - S_\mu^{(\nu)}| \leqq g \qquad \text{für} \begin{cases} \mu \geqq M \\ \nu \geqq N \end{cases}$$

wenn $g > 0$ beliebig gewählt ist.

Ist also $n_0 \geqq N$, so bleiben die Größen $S_\mu^{(n_0)}$ und daher auch

1) Die hier unter b) c) d) gemachten Aussagen verlieren, falls X oder Y gleich null ist, ihre Bedeutung. Dies gilt jedoch *nicht* von den nachfolgenden Untersuchungen.

$$S_\mu^{(n_0)} - S_{\mu-1}^{(n_0)} = x_0^\mu \sum_{\nu=0}^{n_0} a_\mu^{(\nu)} y_0^\nu$$

mit wachsendem μ unterhalb einer endlichen Schranke, und daher konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{n_0} y_0^\nu P_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n_0} a_\mu^{(\nu)} y_0^\nu \right\} x^\mu$$

für $|x| < |x_0|$.[1]) Wird überdies $n_0 > n$ gewählt, so folgt hieraus die Behauptung, da die eventuell wegzulassenden Zeilen ebenfalls einzeln für $x| < |x_0|$ konvergieren.

Unter den Konvergenzradien $X_\alpha, X_\beta, .., X_\varkappa$ ist der kleinste gleich X selbst. Diejenigen unter den Werten $\nu = \alpha, \beta, .., \varkappa$, für welche $X_\nu = X$ ist, seien in wachsender Folge mit $\gamma, \delta, .., \varepsilon$ bezeichnet. Es sei nun eine positive Größe ϱ in folgender Weise bestimmt: Ist $X_\nu = X$ für *sämtliche* Werte $\nu = \alpha, \beta, .., \varkappa$ so sei $\varrho = |x_0|$; bildet aber das System $\gamma, \delta, .., \varepsilon$ nur einen *Teil* des Systems $\alpha, \beta, .., \varkappa$, so sei $\varrho = X'$, wo X' den nächst X kleinsten der Werte $X_\alpha, X_\beta, ..., X_\varkappa$ bedeute. Da nun die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=\alpha,\beta,..,\varkappa} y_0^\nu P_\nu(x)$ für $|x| < \varrho$ konvergiert, so gilt auch das gleiche von $\sum\limits_{\nu=\gamma,\delta,..,\varepsilon} y_0^\nu P_\nu(x)$, da die eventuell fortgelassenen Potenzreihen einzeln für $|x| < \varrho$ konvergieren. Es ergibt sich also folgendes:

Findet in einem Punkte (x_0, y_0) (bedingte) Konvergenz statt, und ist $x_0| > X$, wo X die untere Grenze der Konvergenzradien sämtlicher Zeilen

1) Dagegen läßt sich aus der Konvergenz von $\mathfrak{P}(x_0, y_0)$ auch im vorliegenden Falle nicht der Schluß ziehen, daß es eine Zahl n_0 gibt, für welche $\sum\limits_{\nu=0}^{n_0} y_0^\nu P_\nu(x_0)$ *selbst* konvergiert. Beispiel: $P_0(x) = \sum\limits_0^\infty (2x)^\mu$, $\quad P_1(x) = \sum\limits_0^\infty \{(-1)^\mu - 2^\mu\} x^\mu$;

$$P_\nu(x) = \frac{1}{2^{\nu-1}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu-1} x^\mu \quad (\nu \geqq 2)$$

$$X_0 = X_1 = \tfrac{1}{2}, \; X_\nu = 1, \; (\nu \geqq 2). \qquad X = \tfrac{1}{2}, \; Y = 2.$$

Im Punkt (1, 1) konvergiert die Doppelreihe (bedingt), da sie hier (wenn die beiden ersten Zeilen vereinigt werden) gleich

$$\begin{array}{l} 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \cdots \\ -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \cdots \\ -\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} - \cdots \end{array}$$

wird, also die Summe 0 besitzt. Dagegen konvergiert die Summe der N ersten Zeilen nicht, wie groß auch N gewählt werde.

bedeutet, so konvergiert die Potenzreihe

$$y_0^\gamma P_\gamma(x) + y_0^\delta P_\delta(x) + \cdots + y_0^\varepsilon P_\varepsilon(x)$$

gebildet aus denjenigen (stets und zwar in endlicher Anzahl vorhandenen) *Zeilen, welche den Konvergenzradius X besitzen, über* $|x| = X$ *hinaus* (nämlich für $|x| < \varrho$). Die Anzahl dieser Zeilen ist also mindestens *zwei.*

Offenbar gilt das gleiche auch für die Potenzreihe

$$S(x, y_0) = P_\gamma(x) + y_0 P_{\gamma+1}(x) + \cdots + y_0^{\varepsilon-\gamma} P_\varepsilon(x)$$

da die eventuell hinzugefügten Potenzreihen wiederum einzeln für $|x| < \varrho$ konvergieren.

Es sei nun $\varepsilon - \gamma = \tau$ gesetzt und wir wollen annehmen, es finde (bedingte) Konvergenz in $\tau + 1$ Punkten $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_\tau, y_\tau)$ statt, welche den Bedingungen $|x_0| > X, \ldots, |x_\tau| > X$ genügen mögen, während die Größen $y_0, y_1, \ldots, y_\tau$ beliebig, aber sämtlich verschieden seien. Alsdann hat jede der $\tau + 1$ Potenzreihen in x

$$S(x, y_0) = P_\gamma(x) + y_0 P_{\gamma+1}(x) + \cdots + y_0^\tau P_\varepsilon(x)$$
$$S(x, y_1) = P_\gamma(x) + y_1 P_{\gamma+1}(x) + \cdots + y_1^\tau P_\varepsilon(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S(x, y_\tau) = P_\gamma(x) + y_\tau P_{\gamma+1}(x) + \cdots + y_\tau^\tau P_\varepsilon(x)$$

einen Konvergenzradius, welcher größer als X ist; der kleinste derselben möge mit ϱ_0 bezeichnet werden, so daß auch $\varrho_0 > X$.

Vermöge dieser $\tau + 1$ Gleichungen lassen sich nun aber die Potenzreihen $P_\gamma(x), P_{\gamma+1}(x), \ldots, P_\varepsilon(x)$ homogen und linear (mit von x unabhängigen Koeffizienten) durch die Potenzreihen $S(x, y_0), S(x, y_1), \ldots, S(x, y_\tau)$ ausdrücken; denn die Determinante des Systems ist als das Differenzenprodukt der Größen $y_0, y_1, \ldots, y_\tau$ von null verschieden. Es müßten infolgedessen die Potenzreihen $P_\gamma(x), P_\delta(x), \ldots, P_\varepsilon(x)$ selbst für $|x| < \varrho_0$ konvergieren, während sie tatsächlich nur den Konvergenzradius X besitzen. Die Annahme war daher unzulässig und wir erhalten das Resultat:

$\mathfrak{P}(x, y)$ *kann, sobald* $|x| > X$ *ist, höchstens für* τ *(feste) Werte von y noch konvergieren. Gibt es Zeilen, und zwar in nur endlicher Anzahl, welche X selbst zum Konvergenzradius haben, so ist* τ *gleich der Differenz der Stellenzeiger* ν *der ersten und der letzten unter denselben; gibt es jedoch keine oder unendlich viele solcher Zeilen, so ist* $\tau = 0$.[1])

Die gleiche Betrachtung läßt sich für den Fall $|y| > Y$ durchführen, und man erhält also schließlich folgende Zusammenstellung:

a) Im Gebiete $|x| \leqq X$, $|y| \leqq Y$ kann bedingte Konvergenz höchtens am Rande des Bereiches der absoluten Konvergenz stattfinden.

b) Im Gebiete $|x| > X$, $|y| \leqq Y$ kann (bedingte) Konvergenz höchstens für τ Werte von y stattfinden; dabei ist τ eine

1) Letzteres folgt bereits aus dem in § 1 bewiesenen Satze.

endliche Zahl, welche die soeben ausgesprochene Bedeutung besitzt.

c) Im Gebiete $|x| \leqq X$, $|y| > Y$ kann (bedingte) Konvergenz höchstens für τ' Werte von x stattfinden; dabei ist τ' eine endliche Zahl, welche die analoge Bedeutung für die Kolonnen besitzt.

d) Im Gebiete $|x| > X$, $|y| > Y$ endlich kann (bedingte) Konvergenz höchstens in $\tau\tau'$ Punkten stattfinden.

Beispiel. $\mathfrak{P}(x, y) = y^2 \frac{1-y^3}{1-x}$, also $P_2(x) = -P_5(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} x^\mu$, $P_\nu(x) = 0$ außer für $\nu = 2$ und $\nu = 5$. Für $|x| < 1$ findet absolute Konvergenz statt; für $|x| \geqq 1$ aber noch bedingte Konvergenz, falls y eine dritte Einheitswurzel ist. Tatsächlich ist hier $\tau = 3$. Natürlich kann man, ohne die Verhältnisse zu modifizieren, noch eine beliebige, in dem ganzen betrachteten Gebiet absolut konvergente Doppelreihe hinzufügen.

§ 8.

Es wurde gezeigt, daß, wenn $\mathfrak{P}(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) konvergiert, die Summe derjenigen (höchstens in endlicher Anzahl vorhandenen) Zeilen, deren Konvergenzradius kleiner ist als $|x_0|$, *für* $y = y_0$ stets eine Potenzreihe in x darstellt, welche für $|x| < |x_0|$ konvergiert. Dagegen ist, vorausgesetzt, daß sämtliche Kolonnen für $|y| < |y_0|$ konvergieren, die Konvergenz der nach Abscheidung jener Zeilen übrig bleibenden Doppelreihe zwar für $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$, *nicht aber für* $y = y_0$, $|x| < |x_0|$ erwiesen. Wir wollen nun noch nachweisen, daß auch $\mathfrak{P}(x, y_0)$ *selbst* für $|x| < |x_0|$ konvergiert (wenn auch ev. nur bedingt), falls noch vorausgesetzt wird, daß sämtliche *Kolonnen* für $y = y_0$ (bedingt oder unbedingt) konvergieren (so daß $|y_0| \leqq Y$, der Punkt (x_0, y_0) also der Bedingung a) oder b) entspricht).[1] Der Satz lautet:

Konvergieren für $y = y_0$ sämtliche Kolonnen (bedingt oder unbedingt), und konvergiert die Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y_0)$ selbst für $x = x_0$, so konvergiert sie auch für $|x| < |x_0|$.

Beweis. Zunächst ist klar, daß wenigstens die *Kolonnenreihe* für $|x| < |x_0|$ konvergiert. Denn aus der Konvergenz der Doppelreihe $\mathfrak{P}(x_0, y_0) = S$ und ihrer sämtlichen Kolonnen folgt (§ 1) die Konvergenz ihrer Kolonnenreihe gegen den nämlichen Wert S, d. h.

$$Q(x, y_0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} Q_\mu(y_0) x^\mu = S \qquad \text{für } x = x_0$$

und folglich konvergiert diese Summe auch für $|x| < |x_0|$.

1) Daß die Bedingung $|y_0| \leqq Y$ auch eine notwendige ist, folgt unmittelbar aus dem Vorangehenden.

Nun lassen sich wegen der Konvergenz der Doppelreihe und der Kolonnenreihe in $\mathfrak{P}(x_0, y_0)$ nach Annahme von $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen M, N derart bestimmen, daß sowohl

$$\left|\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} u_\mu^{(\nu)} - S\right| \leqq \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{für } \begin{cases} m \geqq M \\ n \geqq N \end{cases}$$

als auch

$$\left|\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)} - S\right| \leqq \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{für } m \geqq M$$

wo

$$u_\mu^{(\nu)} = a_\mu^{(\nu)} x_0^\mu y_0^\nu,$$

so daß

$$\left|\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)} - \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} u_\mu^{(\nu)}\right| = \left|\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_{m+1}^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \qquad \text{für } \begin{cases} m \geqq M \\ n \geqq N. \end{cases}$$

Da jedoch auch die $M+1$ ersten Kolonnen konvergieren, so ergibt sich, indem man eventuell N durch das größere N' ersetzt:

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_m^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \qquad \text{für } n \geqq N'.$$
$$(m = 0, 1, 2 \ldots)$$

Ersetzt man x_0 durch einen Wert x, für welchen $|x| < |x_0|$, so geht $u_\mu^{(\nu)}$ in $k^\mu u_\mu^{(\nu)}$ über, wo $k = \frac{x}{x_0}$, $|k| < 1$. Ist nun die Summe der *Kolonnenreihe*

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)}\right\} k^\mu = S',$$

so zeigen wir, daß auch die *Doppelreihe* $\mathfrak{P}(x, y_0)$ die Summe S' besitzt. In der Tat ist

$$\left|S' - \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} k^\mu u_\mu^{(\nu)}\right| = \left|\sum_{\mu=0}^{m} k^\mu \sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_\mu^{(\nu)} + \sum_{\mu=m+1}^{\infty} k^\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)}\right|.$$

Wegen der Konvergenz von $Q(x_0, y_0)$ läßt sich aber nach Annahme von $\varepsilon > 0$, wenn noch $\varepsilon' = \varepsilon(1 - |k|)$ gewählt wird, M' so bestimmen, daß

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} u_m^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon' \qquad \text{für } m \geqq M',$$

und N', wie oben auseinandergesetzt, so, daß

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_m^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon' \quad (m=0,1,2\ldots) \quad \text{für } n \geqq N'.$$

Für jedes Wertepaar $m \geqq M'$, $n \geqq N'$ wird alsdann

$$\left|S' - \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} k^\mu u_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \sum_{\mu=0}^{m} |k|^\mu \cdot \varepsilon' + \sum_{\mu=m+1}^{\infty} |k|^\mu \cdot \varepsilon'$$

$$= \varepsilon' \sum_{\mu=0}^{\infty} |k|^\mu = \frac{\varepsilon'}{1-|k|} = \varepsilon, \quad \text{q. e. d.}$$

Liegt der Punkt (x_0, y_0) *innerhalb* des Bereiches der absoluten Konvergenz, so wird durch den Satz nichts Neues ausgesagt. Ist jedoch (x_0, y_0) ein *Randpunkt* desselben, d. h. sind $|x_0| = r$, $|y_0| = r'$ ein Paar assoziierter Radien, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder ist r' kleiner als der Maximalradius R', alsdann sind die Punkte $|x| < |x_0|$, $y = y_0$ wiederum innere Punkte des Konvergenzbereiches. Oder aber es ist $r' = R'$, alsdann werden die Punkte $|x| < |x_0|$, $y = y_0$ ebenfalls Randpunkte; für diese findet also dann auch noch (ev. nur bedingte) Konvergenz statt, falls $R' < Y$ ist; ist $R' = Y$, so gilt noch das gleiche, wenn nur für $y = y_0$ sämtliche Kolonnen noch konvergieren. Liegt endlich (x_0, y_0) *außerhalb* des Bereiches der absoluten Konvergenz, so kann es sich, da dies im Fall a) nicht möglich ist, nur noch um den Fall b) handeln, in welchem $|x_0| > X$ ist; auch in diesem Falle konvergiert also, falls $|y_0| < Y$, oder falls wenigstens alle Kolonnen für $y = y_0$ noch konvergieren, die Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y_0)$ für alle $|x| < |x_0|$.

Beispiel. $$\mathfrak{P}(x, y) = \frac{1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} y^\nu}{1-x},$$

also

$$a_\mu^{(0)} = 1, \quad a_\mu^{(\nu)} = \frac{(-1)^\nu}{\nu} \quad (\nu \geqq 1); \quad X = Y = 1.$$

Der Bereich der absoluten Konvergenz ist das volle Gebiet $|x| < 1$, $|y| < 1$, so daß

$$R_0 = R = X = 1$$
$$R_0' = R' = Y = 1.$$

Wird $|x_0| < 1$ gewählt, so findet für $x = x_0$, $y = y_0 = 1$ (also am Rande des Bereiches) bedingte Konvergenz statt, für $y = y_0$ konvergieren alle Kolonnen (bedingt); dementsprechend findet für alle Punkte $|x| < |x_0|$, $y = y_0$ ebenfalls (bedingte) Konvergenz statt.

Für den Fall $|x_0| > X$ stellen alle bisher aufgeführten Fälle bedingter Konvergenz Beispiele dar.

§ 9.

Es erschien (p. 5) als eine notwendige Bedingung für das Eintreten der (ev. nur bedingten) Konvergenz in (x_0, y_0) die Existenz zweier Zahlen m, n, für welche

$$\sum_{\substack{\mu=m\\ \nu=n}}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$$

im Gebiet $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ absolut konvergiert.[1]) Wir wollen schließlich noch eine explizite Darstellung des Gebietes geben, in welchem diese Bedingung erfüllt ist. Besteht nämlich zwischen ϱ und ϱ' die Relation

$$\overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_\mu^{(\nu)} \varrho^\mu \varrho'^\nu} = 1,$$

so ist die genannte Bedingung stets erfüllt, wenn gleichzeitig $|x_0| < \varrho$, $|y_0| < \varrho'$, *jedoch niemals erfüllt, wenn gleichzeitig* $|x_0| > \varrho$, $|y_0| > \varrho'$.

Dabei bedeutet

$$\overline{B} = \overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}} \; b_\mu^{(\nu)}$$

den *oberen Doppellimes* der Doppelfolge der (positiven) Größen

$$b_\mu^{(\nu)} = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_\mu^{(\nu)} \varrho^\mu \varrho'^\nu}, \qquad \alpha_\mu^{(\nu)} = |a_\mu^{(\nu)}|$$

welcher durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert wird:[2])

Nach Annahme von $\varepsilon > 0$ gibt es

1. zwei Zahlen m, n derart, daß

$$b_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{B} + \varepsilon \qquad \text{für} \begin{cases} \mu \geqq m \\ \nu \geqq n \end{cases}$$

2. unendlich viele Wertsysteme μ, ν, welche jede beliebig groß vorgeschriebene Zahl übersteigen, und für welche

$$b_\mu^{(\nu)} \geqq \overline{B} - \varepsilon.$$

Beweis. Ist $|x_0| < \varrho$, $|y_0| < \varrho'$ und bestimmt man t gemäß den Ungleichungen

$$\frac{|x_0|}{\varrho} < t < 1, \qquad \frac{|y_0|}{\varrho'} < t < 1$$

so gibt es, da $\overline{B} = 1$ ist, zwei Zahlen m, n derart, daß

$$b_\mu^{(\nu)} \leqq \frac{1}{t}$$

oder

$$\alpha_\mu^{(\nu)} \varrho^\mu \varrho'^\nu \leqq \frac{1}{t^{\mu+\nu}} \qquad \text{für} \begin{cases} \mu \geqq m \\ \nu \geqq n \end{cases}$$

---

1) Diese Bedingung enthält die zu Beginn des § 7 angegebenen in sich.

2) A. Pringsheim: Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen, § 2. Math. Ann. 53 (1900), p. 294; F. London: Über Doppelfolgen und Doppelreihen, ebenda, p. 325.

so daß die Summe

$$\sum_{\substack{\mu=m\\ \nu=n}}^{\infty} \alpha_{\mu}^{(\nu)} |x|^{\mu} |y|^{\nu} < \sum_{\substack{\mu=m\\ \nu=n}}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^{\mu} \left|\frac{y}{y_0}\right|^{\nu}$$

ist und mithin für $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ konvergiert.

Ist jedoch $|x_0| > \varrho$, $|y_0| > \varrho'$, so sei der Punkt (x, y) so gewählt, daß

$$\varrho < |x| < |x_0|, \quad \varrho' < |y| < |y_0|$$

und die positive Größe τ so, daß

$$1 < \tau < \frac{|x|}{\varrho}, \qquad 1 < \tau < \frac{|y|}{\varrho'}.$$

Alsdann gibt es, wie groß auch m und n angenommen werden, beliebig viele Wertsysteme $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$, für welche

$$b_{\mu}^{(\nu)} \geqq \frac{1}{\tau}$$

oder

$$\alpha_{\mu}^{(\nu)} \varrho^{\mu} \varrho'^{\nu} \geqq \frac{1}{\tau^{\mu+\nu}}$$

so daß in

$$\sum_{\substack{\mu=m\\ \nu=n}}^{\infty} \alpha_{\mu}^{(\nu)} |x|^{\mu} |y|^{\nu} > \sum_{\substack{\mu=m\\ \nu=n}}^{\infty} \alpha_{\mu}^{(\nu)} \varrho^{\mu} \varrho'^{\nu} \tau^{\mu+\nu}$$

unendlich viele Summanden $\geqq 1$ werden.

Die Gleichung zwischen ϱ und ϱ' läßt offenbar eine ähnliche Parameterdarstellung zu wie die entsprechende Gleichung in § 5.

Beispiel. Es sei

$$P_0(x) = P_1(x) = 0$$

$$P_{2\nu}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\mu} x^{\mu}, \qquad P_{2\nu+1}(x) = -2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\mu} x^{\mu}. \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

Hier ist $X = \frac{1}{2}$, $Y = 1$, und der Bereich der absoluten Konvergenz ist das volle Gebiet $|x| < X$, $|y| < Y$. Dagegen ist die in Rede stehende notwendige Bedingung für die bedingte Konvergenz, wie leicht zu sehen, noch in jedem Punkt (x_0, y_0) erfüllt, für welchen $|x_0| < 1$, $|y_0| < 1$, und die angegebene Relation zwischen ϱ und ϱ' wird dementsprechend befriedigt, sobald gleichzeitig $0 < \varrho \leqq 1$, $\varrho' = 1$ oder $\varrho = 1$, $0 < \varrho' \leqq 1$. Tatsäch-sächlich findet für $y_0 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leqq |x_0| < 1$ bedingte Konvergenz statt. (Dieses Beispiel lehrt zugleich, daß die Absonderung einer endlichen Anzahl von Zeilen und Kolonnen, wenn sie es auch stets ermöglicht, den Bereich der absoluten Konvergenz bis an irgend eine vorgeschriebene Stelle bedingter Konvergenz heran auszudehnen, es doch nicht immer gestattet, den Be-

reich so weit auszudehnen, daß er gleichzeitig *sämtliche* Stellen bedingter Konvergenz umfaßt bezw. berührt.)

Das obige Ergebnis kann noch dazu benutzt werden, um den *Bereich der absoluten Konvergenz* in einer etwas veränderten Weise darzustellen. Genügt nämlich der Punkt (x_0, y_0) speziell den Ungleichungen $|x_0| < X$, $|y_0| < Y$, so ist für ihn die in Rede stehende Bedingung offenbar dann und nur dann erfüllt, wenn er im Innern oder am Rande des Bereiches der absoluten Konvergenz gelegen ist. Der Bereich der absoluten Konvergenz ist also nichts anderes als derjenige Teil des oben dargestellten Gebietes, welcher zugleich dem Gebiete $|x| < X$, $|y| < Y$ angehört, und es gilt daher:

Dasjenige Stück der durch die assoziierten Radien r, r' gebildeten Kurve (§ 4), welches mit keiner der beiden Geraden $r = X$, $r' = Y$ zusammenfällt, gestattet auch die Darstellung:[1])

$$\overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_\mu^{(\nu)} r^\mu r'^\nu} = 1$$

und mithin folgende Parameterdarstellung:

$$\frac{1}{r'} = \overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_\mu^{(\nu)} k^\mu}, \qquad r = kr'.$$

---

1) Der Zusammenhang zwischen dieser Darstellung des Bereiches der absoluten Konvergenz und der früher (§ 5) angegebenen

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_\mu^{(\nu)} r^\mu r'^\nu} = 1$$

kann auch direkt nachgewiesen werden.

Ist nämlich $b_\mu^{(\nu)}$ eine Doppelfolge reeller Größen, so stehen die beiden Grenzwerte

$$\overline{B} = \overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}} b_\mu^{(\nu)} \quad \text{und} \quad \overline{\mathbf{B}} = \overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} b_\mu^{(\nu)}$$

in der folgenden Beziehung zueinander:

Bezeichnet noch $\overline{b}^{(0)}$ die *obere Grenze* der sämtlichen Größen $\overline{b}^{(\nu)} = \overline{\lim_{\mu=\infty}} b_\mu^{(\nu)}$ und $\overline{b}_0$ die *obere Grenze* sämtlicher Größen $\overline{b}_\mu = \overline{\lim_{\nu=\infty}} b_\mu^{(\nu)}$, so ist $\overline{\mathbf{B}}$ *stets mit der größten der drei Zahlen $\overline{b}^{(0)}$, $\overline{b}_0$ und $\overline{B}$ identisch.*

Ist nun $b_\mu^{(\nu)} = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_\mu^{(\nu)} r^\mu r'^\nu}$, so wird $\overline{b}^{(\nu)} = \frac{r}{X_\nu}$, $\overline{b}_\mu = \frac{r'}{Y_\mu}$, also $\overline{b}^{(0)} = \frac{r}{X}$, $\overline{b}_0 = \frac{r'}{Y}$. Die allgemeine Relation $\overline{\mathbf{B}} = 1$ zwischen den assoziierten Radien r, r' kann demnach ersetzt werden durch die drei Ungleichungen:

$$\frac{r}{X} \leqq 1, \qquad \frac{r'}{Y} \leqq 1, \qquad \overline{B} \leqq 1$$

mit der Maßgabe, daß mindestens einmal das Gleichheitszeichen gelten muß. Ist also speziell $r < X$, $r' < Y$, so muß (in Übereinstimmung mit dem Text) $\overline{B} = 1$ sein.

III. Konvergenz der Zeilenreihe.

§ 10.

Während bei einer Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ bedingte Konvergenz nur am Rande des Bereiches der absoluten Konvergenz, sowie allenfalls außerhalb des letzteren noch für einzelne Werte je einer der beiden Veränderlichen — somit in höchstens drei- bzw. zweidimensionalen Gebieten — eintreten konnte, so kann die *Zeilenreihe* $P(x, y)$ sehr wohl in einem Bereich $\mathfrak{T}$[1]), ja sogar für jeden endlichen Wert von x und y[2]) konvergieren, selbst ohne daß die Doppelreihe (außer für $y = 0$) irgend eine Konvergenzstelle besitzt. Es wird somit zunächst die Aufgabe sein, den Konvergenzbereich der Zeilenreihe einer vorgelegten Potenzreihe näher zu untersuchen, während wir uns die Behandlung der Frage, inwieweit sich der durch die Zeilenreihe definierte Ausdruck in passend gewählten Teilbereichen mit absolut konvergenten Doppelreihen identifizieren läßt, für später vorbehalten wollen.

Die Zeilenreihe

$$P(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) y^\nu \qquad \text{wo } P_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu$$

einer Potenzreihe zweier Veränderlichen ist für jeden Wert von x, für welchen sämtliche $P_\nu(x)$ einen endlichen Wert besitzen, eine Potenzreihe in bezug auf y. Die Veränderliche x ist also von vornherein der Beschränkung

$$|x| \leqq X$$

unterworfen, wo X wiederum die *untere Grenze* der Konvergenzradien X_ν sämtlicher Zeilen bedeutet.[3]) Wird der Veränderlichen x irgend ein

---

1) Beispiel. $P_\nu(x) = (x - 2)^{\nu^2}$; $P(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (x - 2)^{\nu^2} y^\nu$ konvergiert bei jedem endlichen y, falls $|x - 2| < 1$. Die Doppelreihe dagegen kann (außer für $y = 0$) nirgends (bedingt oder unbedingt) konvergieren, da die Konvergenzradien sämtlicher Kolonnen gleich 0 sind.

2) Ein Beispiel dieser Art wird in § 23 behandelt werden.

3) Dagegen gilt hier nicht mehr die Beschränkung $|y| \leqq Y$. (Vgl. das Beispiel in Fußn. 1).)

Wert beigelegt, und bezeichnet man alsdann mit ϱ' den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) y^\nu$,

$$\frac{1}{\varrho'} = \overline{\lim}\, \sqrt[\nu]{|P_\nu(x)|}\ ^{1)}$$

so konvergiert $P(x, y)$ für $|y| < \varrho'$, divergiert dagegen für $|y| > \varrho'$.

Umgekehrt wird also, wenn man die Werte von y auf das Innere eines Kreises um den Nullpunkt mit gegebenem Radius ϱ' beschränkt, die Gesamtheit $\bar{P}$ der Werte von x, für welche $P(x, y)$ konvergiert, dargestellt durch die Ungleichung

$$\overline{\lim}\, \sqrt[\nu]{|P_\nu(x)|} \leqq \frac{1}{\varrho'}.$$

Über die Gestalt eines solchen Gebietes der x-Ebene lassen sich jedoch von vornherein keinerlei allgemein gültige Aussagen machen. Dasselbe kann z. B. (auch für jeden Wert von ϱ') aus einer nur abzählbar unendlichen Menge von Punkten, oder auch aus einer geraden Linie bestehen.[2]) Andererseits kann es sich auch aus mehreren getrennten zweidimensionalen Bereichen zusammensetzen.[3])

Es wird infolgedessen von Vorteil sein, die sämtlichen Potenzreihen $\mathfrak{P}(x, y)$ hinsichtlich des Verhaltens ihrer Zeilenreihe $P(x, y)$ in zwei Klassen zu sondern, und zwar eine vorgelegte Potenzreihe der einen oder der andern Klasse zuzuweisen, jenachdem es in der x-Ebene einen Bereich B[4]) gibt, in welchem die Zeilenreihe für irgend einen (von 0 verschiedenen) Wert $y = y_0$ durchweg konvergiert, oder nicht. (In dem einen Falle bleibt $\overline{\lim}\, \sqrt[\nu]{|P_\nu(x)|}$ in B unterhalb einer endlichen Schranke, während in dem andern $\overline{\lim}\, \sqrt[\nu]{|P_\nu(x)|}$ in jedem noch so kleinen zweidimensionalen Gebiet beliebig große Werte annimmt.[5]))

---

1) Dem Symbol $\overline{\lim}\, A_\nu$ ist, wie bisher, stets der Wert ∞ beizulegen, wenn auch nur *eine* der Größen A_ν unendlich groß ist.

2) Beispiele. 1. Wählt man $P_\nu(x) = \nu!\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_\nu}\right)$, $(x_\nu \neq 0)$, so konvergiert, $y \neq 0$ vorausgesetzt, $P(x, y)$ dann und nur dann, wenn x mit einer der Stellen $x_1, x_2, \ldots$ zusammenfällt; dabei sollen die Werte $x_1, x_2, \ldots$ der einzigen Beschränkung unterworfen sein, daß ihre Häufungsstellen unter ihnen enthalten sind. 2. Wählt man $P_\nu(x) = e^{i\nu^2 \pi x} + e^{-i\nu^2 \pi x}$, so konvergiert, $0 < |y| < 1$ vorausgesetzt, $P(x, y)$ dann und nur dann, wenn x reell ist.

3) Beispiel. $P_\nu(x) = (x^2 - 4)^{\nu^2}$. Der Konvergenzbereich in der x-Ebene ist hier, unabhängig von y, das Gebiet $|x^2 - 4| < 1$ und besteht daher aus zwei getrennten Stücken. Weiteres Beispiel in § 13.

4) S. p. 3, Fußn. Natürlich würde es hier genügen, sich auf die Betrachtung kreisförmiger Bereiche zu beschränken.

5) Beispiele für den letzteren Fall liefern die beiden unter 1) aufgeführten Doppelreihen, und zwar die erste derselben auch dann, wenn die Werte $x_1, x_2, \ldots$ völlig willkürlich sind. (Vgl. § 14.)

Die weiteren Untersuchungen knüpfen naturgemäß an den ersteren Fall an. Wir beweisen zunächst den allgemeinen Satz:

Konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) y^\nu$$

deren Koeffizienten jetzt beliebige von x abhängige Größen sein mögen, im Punkt $y = y_0$ für alle Werte von x, welche einem gewissen Bereich B der x-Ebene angehören, und sind die $P_\nu(x)$ in B sämtlich stetig, so gibt es stets einen zweidimensionalen Teilbereich B_0 von B, in bezug auf welchen $\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) y^\nu$ sicher gleichmäßig konvergiert, solange $|y| < |y_0|$ ist.

Beweis. Nach Annahme einer beliebigen positiven Größe G läßt sich jedem Punkt x des Bereiches B eine ganze Zahl n derart zuordnen, daß

$$|P_\nu(x) \cdot y_0^\nu| \leqq G \qquad \text{für } \nu \geqq n.$$

Durch diese Zuordnung wird umgekehrt jeder positiven ganzen Zahl n eine endliche oder unendlich große Anzahl von Punkten x des Bereiches B zugewiesen. Es sind nun zwei Fälle denkbar. Entweder gibt es eine Zahl $n = n_0$ von der Beschaffenheit, daß die zugehörigen Punkte x eine in einem gewissen zweidimensionalen Teilgebiet B_0 von B *überall dichte* Punktmenge bilden, oder es gibt eine derartige Zahl n nicht.

In dem ersteren Falle gelten die Ungleichungen

$$|P_\nu(x) \cdot y_0^\nu| \leqq G \qquad (\nu \geqq n_0)$$

für eine unendliche Anzahl von Werten x, welche eine in B_0 überall dichte Punktmenge bilden, und daher wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $P_\nu(x)$ offenbar auch für *jeden* Wert x des Bereiches B_0. Mithin konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) y^\nu$ im Bereich B_0 *gleichmäßig*, solange $|y| < |y_0|$.

Es bleibt nun noch die zweite Möglichkeit zu untersuchen, nämlich daß es keine Zahl $n = n_0$ von der obigen Beschaffenheit gibt; wir zeigen, daß dieselbe auf einen Widerspruch führt.[1])

Zunächst ist die dem Wert $n = 0$ zugeordnete Punktmenge x nach Annahme in keinem Teilgebiet von B überall dicht, mithin gibt es sicher

---

1) Einer analogen Schlußweise hat sich, wie ich erst nachträglich bemerkt habe, Herr Osgood mehrfach bedient. (Vgl. *Zweite Note über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen*. Math. Ann. 53 (1900), p. 462.) Während ferner unter den bloßen Voraussetzungen des Textes die Existenz von Teilbereichen gleichmäßiger Konvergenz *für $y = y_0$ selbst* nicht nachweisbar ist, so wird dieselbe, sobald vorausgesetzt wird, daß die $P_\nu(x)$ in B reguläre analytische Funktionen sind, ebenfalls durch Untersuchungen des Herrn Osgood dargetan. (*Note on the functions defined by infinite series, whose terms are analytic functions*. Ann. of Math. (2) 3. (1901) §§ 1 und 2.) Mit dem Gesagten hängt es zusammen, daß der letztere Satz zum Unterschied von demjenigen des Textes auf *eindimensionale* x-Bereiche nicht übertragbar ist.

ein Teilgebiet B_1 von B, welches *keinen* der zu $n=0$ gehörigen Punkte x enthält. Die dem Wert $n=1$ zugeordnete Punktmenge ist wiederum in keinem Teilgebiet von B überall dicht, also auch nicht in B_1; d. h. es gibt ein Teilgebiet B_2 von B_1, welches auch keinen der zu $n=1$ gehörigen Punkte enthält, ebenso ein Teilgebiet B_3 von B_2, welches keinen der zu $n=0, 1, 2$ gehörigen Punkte enthält, u. s. f. Da nun jedes der Gebiete $B, B_1, B_2, \ldots$ alle folgenden enthält, so muß es mindestens einen Grenzpunkt $x=x'$ geben, welcher *jedem* der Gebiete $B, B_1, B_2, \ldots$ angehört. Da aber dem Punkt $x=x'$ ebenfalls ein Wert $n=n'$ zugeordnet war, so kann derselbe in Wahrheit den Gebieten $B_{n'+1}, B_{n'+2}, \ldots$ nicht mehr angehören.

Der Satz gilt offenbar insbesondere für die Zeilenreihe $P(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) y^\nu$ einer Potenzreihe; dabei kann derjenige Teil der Voraussetzung, welcher sich auf die Stetigkeit der Koeffizienten $P_\nu(x)$ bezieht, als von selbst erfüllt, fortgelassen werden.

Die Sonderung der Potenzreihen in die beiden Klassen hinsichtlich des Verhaltens ihrer Zeilenreihe bleibt demnach sachlich ungeändert, wenn bei der obigen Festsetzung das Wort „konvergiert" ersetzt wird durch „gleichmäßig konvergiert".

§ 11.

Die *gleichmäßige* Konvergenz der Zeilenreihe in bezug auf x[1]) tritt bei den meisten die Zeilenreihe betreffenden Untersuchungen in den Vordergrund. Nachdem ihr Vorkommen bei allen Potenzreihen der einen der beiden obigen Klassen nachgewiesen ist, wollen wir zunächst ihren Bereich analytisch charakterisieren.

Wir wählen in der x-Ebene einen beliebigen, dem Gebiet $|x| < X$ angehörenden Bereich B[2]) und bezeichnen das Maximum des absoluten Betrages von $P_\nu(x)$ in demselben mit g_ν. Alsdann gilt:

Die Gesamtheit der Stellen $y=y_0$, für welche $P(x, y_0)$ in bezug auf B gleichmäßig konvergiert, erfüllt einen Kreis um den Nullpunkt, welcher identisch ist mit dem Konvergenzkreis der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu y^\nu$. (Das Verhalten von $P(x, y_0)$ bleibt jedoch zweifelhaft, wenn y_0 auf der Peripherie dieses Kreises gelegen ist.) Denn einerseits folgt aus der absoluten Kon-

---

1) Konvergiert eine Zeilenreihe für jeden Wert y eines Bereiches T' gleichmäßig in bezug auf die Umgebung jeder Stelle x eines Bereiches T, so konvergiert dieselbe offenbar auch gleichmäßig in bezug auf die volle Umgebung jedes Punktes (x, y) des so definierten Bereiches $\mathfrak{T}$.

2) Über die Bezeichnung der Bereiche vgl. p. 3, Fußn.

vergenz von $\sum_\nu g_\nu y_0^\nu$ die gleichmäßige Konvergenz von $P(x, y_0)$ im Bereich B; andererseits aus der gleichmäßigen Konvergenz von $P(x, y_0)$ im Bereich B die absolute Konvergenz von $\sum_\nu g_\nu y^\nu$ für $|y| < |y_0|$, da $g_n |y_0|^n$ mit wachsendem n unterhalb einer endlichen Schranke bleibt.

Man kann nun wieder umgekehrt y auf das Innere eines Kreises mit gegebenem Radius ϱ' um den Nullpunkt beschränken und nach dem zugehörigen Gebiet der gleichmäßigen Konvergenz in der x-Ebene fragen. Dasselbe wird erhalten, wenn man von der oben (§ 10) definierten Gesamtheit $\overline{P}$ derjenigen Werte von x ausgeht, für welche $P(x, y)$ bei allen $|y| < \varrho'$ überhaupt konvergiert, und nur diejenigen Punkte von $\overline{P}$ beibehält, welche nach Annahme eines beliebigen Wertes $y_0 (|y_0| < \varrho')$ stets noch eine Umgebung besitzen, innerhalb welcher $P(x, y_0)$ gleichmäßig konvergiert. Bezeichnet man die Gesamtheit dieser Punkte mit P, so kann P im folgenden Sinne als das *dem Kreise* $|y| < \varrho'$ *zugeordnete Gebiet der gleichmäßigen Konvergenz* von $P(x, y)$ bezeichnet werden:

Ist irgend ein Bereich T der x-Ebene vorgelegt, so konvergiert die Zeilenreihe $P(x, y)$ dann und nur dann für jeden der Bedingung $|y| < \varrho'$ genügenden Wert von y in jedem Teilbereich B des Bereiches T gleichmäßig, wenn sämtliche Punkte von T der Menge P angehören.

Denn die gleichmäßige Konvergenz in bezug auf jeden Teilbereich B von T ist mit derjenigen in bezug auf die Umgebung eines jeden Punktes von T gleichbedeutend.[1])

Ferner ergibt sich aus dem in § 10 bewiesenen Satze:

Das Gebiet P erfüllt jeden Bereich T, dessen sämtliche Punkte zu $\overline{P}$ gehören, überall dicht.[2])

Denn ist $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Reihe positiver Größen, welche gegen 0 konvergiert, so gibt es in jedem zu T gehörigen Bereich B eine Reihe von Teilbereichen $B_1, B_2, \ldots$, derart, daß B_ν nur aus *inneren* Punkten von $B_{\nu-1}$ besteht, und daß $P(x, y)$ für alle $|y| < \varrho' - \varepsilon_\nu$ im Bereich B_ν *gleichmäßig* konvergiert ($\nu = 1, 2, \ldots$). Es existiert alsdann mindestens ein Grenzpunkt, welcher *jedem* der Bereiche B_ν angehört, daher auch *innerer* Punkt jedes Bereiches B_ν ist, und folglich der Menge P angehört.

Die Menge P (oder irgend einer der zusammenhängenden Teile, aus welchen sie eventuell besteht,) kann niemals einen *mehrfach* zusammenhängenden Bereich darstellen. Es gilt nämlich:

Jeder beliebige Bereich B, dessen Randkurve C vollständig zu P gehört, besteht ebenfalls ausschließlich aus Punkten von P.

Denn es konvergiert $P(x, y_0)$, solange $|y_0| < \varrho'$, gleichmäßig in bezug

1) Dies kann z. B. mittels des Hilfssatzes in § 18 dargetan werden.

2) Beispiel in § 28.

auf die Umgebung jedes Punktes von C und mithin auch gleichmäßig in bezug auf die Gesamtheit der Punkte von C selbst.[1]) Nun gilt aber[2]):

Konvergiert eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(x)$, *deren Terme für alle Werte* x *eines gewissen Bereiches* B *eindeutig und regulär sind*[3]), *gleichmäßig in bezug auf die Randkurve* C *des Bereiches* B, *so konvergiert sie auch gleichmäßig in bezug auf den Bereich* B *selbst.* Denn es ist n so bestimmbar, daß

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+p} F_\nu(x)\right| \leqq \varepsilon \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

für alle x der Kurve C, und folglich auch für sämtliche x des Bereiches B, da die Funktion $\sum_{\nu=n}^{n+p} F_\nu(x)$ im Bereiche B das Maximum ihres absoluten Betrages auf dem Rande annimmt.[4])

Mithin konvergiert $P(x, y_0)$ im Bereiche B gleichmäßig, so daß auch alle *inneren* Punkte von B notwendig zu P gehören.

§ 12.

Wir wollen nun unsere Betrachtungen auf den Fall spezialisieren, wo der vorgelegte Bereich B der x-Ebene ein Kreis um den Nullpunkt mit gegebenem Radius r ist.

---

1) Vgl. Fußn. 1) auf vor. Seite.

2) Vgl. a. Runge, Acta Math. VI (1885), p. 247.

3) Oder auch bloß sich in der Umgebung jedes *inneren* Punktes von B regulär verhalten, jedoch in B (gleichmäßig) stetig sind.

4) Ist eine nicht konstante analytische Funktion $f(x)$ in $x = 0$ regulär, so nimmt sie in jeder beliebigen Nähe des Punktes $x = 0$ Werte an, deren absolute Beträge $|f(0)|$ *übertreffen*. Ist $f(0) = 0$, so ist dies selbstverständlich. Ist aber $|f(0)| > 0$, so bringe man die Entwickelung nach Potenzen von x auf die Form $f(x) = a\{1 + bx^k(1 + x\mathfrak{P}(x))\}$, wo $|a| > 0$, $|b| > 0$, wähle alsdann die Anomalie von x so, daß bx^k positiv wird, und beschränke den absoluten Betrag von x nach oben so, daß $|x\mathfrak{P}(x)| \leqq \frac{1}{2}$; für jeden derartigen Wert von x gilt dann offenbar die Behauptung. (Ist $|f(0)| > 0$, so ist in der Umgebung auch $\log f(x)$ regulär; sein reeller Teil $\log|f(x)|$ nimmt daher nach dem Satze vom arithmetischen Mittel in beliebiger Nähe Werte an, welche $\log|f(0)|$ übertreffen, woraus das gleiche folgt.) Ist nun eine Funktion $f(x)$ in B stetig und in jedem inneren Punkt von B regulär, so besitzt ihr absoluter Betrag in B notwendig einen Maximalwert; dieser kann jedoch unmöglich in einem inneren Punkte auftreten und muß sich somit notwendig in einem Punkte des Randes C einstellen.

(Für den vorliegenden Zweck lassen sich übrigens diese Betrachtungen ganz ausschalten. Aus dem Satze vom arithmetischen Mittel, angewandt auf den reellen und imaginären Teil von $f(x)$, folgt nämlich unmittelbar das Stattfinden der Ungleichung $|f(x)| \leqq 2G$ für alle x des Bereiches B, wenn G das Maximum von $f(x)$ längs C bedeutet. Diese Ungleichung leistet aber im vorliegenden Falle offenbar dieselben Dienste.)

Soll $P(x, y)$ für jeden derartigen Wert von x konvergieren, so ist y auf einen Kreis mit dem Radius ϱ' um den Nullpunkt zu beschränken, wobei $\frac{1}{\varrho'}$ die obere Grenze aller Werte $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|P_\nu(x)|}$ für $|x| \leqq r$ bedeutet.

Die Gesamtheit der Stellen $y = y_0$ hingegen, für welche *gleichmäßige* Konvergenz in bezug auf den Bereich B erfolgt, erfüllt einen Kreis um den Nullpunkt, welcher identisch ist mit dem Konvergenzkreis der Potenzreihe $\sum_\nu g_\nu y^\nu$.[1]) Dabei ist

$$g_\nu = \underset{|x| \leq r}{\mathrm{Max}} |P_\nu(x)|$$

und hat daher jetzt genau die gleiche Bedeutung wie in §§ 2 und 4; der Radius dieses Konvergenzkreises ist also die dort mit r'' bezeichnete Größe. Da nun (§ 2) $\mathfrak{P}(x, y)$ stets im Gebiet $|x| < r$, $|y| < r''$ absolut konvergiert, im Falle $r < R$ auch noch (§ 4) für $|x| = r$, $|y| < r''$, und da andererseits (§ 2) stets $r'' \geqq \varphi(r)$ ist[2]), so ergibt sich:

Konvergiert die *Zeilenreihe* $P(x, y) = \sum_\nu P_\nu(x) y^\nu$ für $y = y_0$ (oder für alle $|y| < |y_0|$) *gleichmäßig* in bezug auf die Kreisfläche $|x| \leqq r$ (oder in bezug auf die Kreisperipherie $|x| = r$), so konvergiert die *Doppelreihe* im Gebiet $|x| < r$, $|y| < |y_0|$ (im Falle $r < R$ auch noch für $|x| = r$, $|y| < |y_0|$) *absolut*. *Umgekehrt:* Konvergiert die *Doppelreihe* $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiet $|x| \leqq r$, $|y| < |y_0|$ absolut, so konvergiert für jeden Wert $|y| < |y_0|$ die *Zeilenreihe* $P(x, y)$ *gleichmäßig* in bezug auf die Kreisfläche $|x| \leqq r$. (Letzteres ist auch unmittelbar ersichtlich.)

Für die absolute Konvergenz der Doppelreihe in einem Kreisgebiet $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ *um den Nullpunkt ist mithin die gleichmäßige Konvergenz der Zeilenreihe in bezug auf* x *in diesem Gebiet notwendig und hinreichend.*[3])

Der Vollständigkeit halber mag noch hinzugefügt werden, daß, wenn für $y = y_0$ die Zeilenreihe im Gebiet $|x| = r$ (oder $|x| < r$) gleichmäßig konvergiert, die Doppelreihe *auch noch für* $y = y_0$ im Gebiet $|x| < r$ (wenn auch eventuell nur bedingt) konvergiert, desgleichen die Kolonnenreihe.[4])

---

1) Beispiel für den Fall, wo die Radien der beiden Kreise voneinander verschieden (und beide nicht null) sind, in § 23.

2) Dabei gilt — außer eventuell im Falle $r = R$ — stets das Gleichheitszeichen. — Mit R und R' werden wie bisher die Maximalradien des Bereiches der absoluten Konvergenz bezeichnet. (§ 4.)

3) Dabei bedeutet hier „gleichmäßige Konvergenz in bezug auf x" diejenige in bezug auf jeden Kreis $|x| \leqq \varrho - \varepsilon$, wie klein auch $\varepsilon > 0$ gewählt sei.

4) Ist speziell $|y_0| < R'$, so ist die Konvergenz der Doppelreihe auch hier eine absolute, und ihr Eintreten ergibt sich unmittelbar daraus, daß r höchstens gleich dem zu $|y_0|$ assoziierten Radius sein kann. Ist y_0 beliebig (also eventuell auch $|y_0| = R'$), so wird die Konvergenz der Kolonnenreihe durch den Weierstraßschen, die (eventuell bedingte) Konvergenz der Doppelreihe durch den Stolzschen Doppelreihensatz ausgesprochen. (Berl. Ber. 1880, p. 723, bzw. Math. Ann. 24 (1884) p. 169.) Daß die Konvergenz der Doppelreihe für $y = y_0$ (im Falle $|y_0| = R'$) nur eine be-

Ist nun der Bereich B wiederum beliebig,[1]) $x = x_0$ irgend ein innerer Punkt desselben und werden die sämtlichen Zeilen von $\mathfrak{P}(x, y)$ nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt, so daß

$$P_\nu(x) = \overline{P}_\nu(x - x_0)$$
$$P(x, y) = \sum_\nu P_\nu(x) y^\nu = \sum_\nu \overline{P}_\nu(x - x_0) y^\nu$$

so möge die so entstehende neue Doppelreihe mit $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$ bezeichnet werden. Konvergiert alsdann die *Zeilenreihe* $P(x, y)$ für $y = y_0$ (oder für $|y| < |y_0|$) *gleichmäßig* in bezug auf den Bereich B (oder in bezug auf dessen Randkurve C), so konvergiert die *Doppelreihe* $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$ im Gebiet $|x - x_0| < r$, $|y| < |y_0|$ *absolut* und stimmt daselbst dem Werte nach mit $P(x, y)$ überein.[2]) Dabei ist r der Radius des größten noch in B gelegenen Kreises um $x = x_0$.

Bezeichnet man wieder mit P das einem Kreise $|y| < r'$ zugeordnete Gebiet der gleichmäßigen Konvergenz von $P(x, y)$ (§ 11), so hat man also zunächst: *Der (größte) zu r' assoziierte Radius r der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ ist gleich dem Radius des größten Kreises um $x = 0$, dessen innere Punkte sämtlich zu P gehören.* Denn $\mathfrak{P}(x, y)$ konvergiert dann und nur dann in einem Gebiet $|x| < \varrho$, $|y| < r'$ absolut, wenn alle Punkte der Fläche $|x| < \varrho$ Punkte von P sind.

Umgekehrt kann aber auch die absolute Konvergenz der Doppelreihe dazu dienen, um das Gebiet P zu bestimmen. Ist nämlich $x = x_0$ ein beliebiger Wert (dessen absoluter Betrag unterhalb X liegt), so gehört x_0 dem Gebiet P dann und nur dann an, wenn die Doppelreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$ für jedes $|y| < r'$ in der Umgebung des Punktes $x = x_0$ absolut konvergiert. Bezeichnet man aber mit R'_{x_0} den *Maximalradius* der Doppelreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$ in der y-Ebene (§ 4), so ist diese letztere Bedingung wiederum dann und nur dann erfüllt, wenn $R'_{x_0} \geqq r'$ ist. Das einem Kreise $|y| < r'$ zugeordnete Gebiet P der gleichmäßigen Konvergenz besteht somit aus der Gesamtheit der Punkte $x = x_0$, für welche $R'_{x_0} \geqq r'$ ist, und das Gesamtgebiet der gleichmäßigen Konvergenz von $P(x, y)$ läßt sich demnach in der folgenden Weise darstellen:

Ein Punkt (x_0, y_0) hat dann und nur dann die Eigenschaft, daß die Zeilenreihe $P(x, y)$ in bezug auf die ganze Umgebung desselben (oder auch

---

dingte zu sein braucht, lehrt das Beispiel $a_{\mu}^{(\nu)} = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu}$, $y_0 = 1$, wenn $r < 1$ gewählt wird.

1) Der Bereich B soll jedoch wie bisher stets dem Kreise $|x| \leqq X$ angehören, da andernfalls die Ausführungen gegenstandslos werden.

2) Natürlich kann dieser Satz mit Anwendung von § 11 auch in der folgenden Form ausgesprochen werden: Bezeichnet g_ν das Maximum von $|P_\nu(x)|$ im Bereiche B (oder längs dessen Randkurve C), und hat $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{g_\nu}$ einen endlichen Wert g, so konvergiert die Doppelreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$ im Gebiet $|x - x_0| < r$, $|y| < \frac{1}{g}$ absolut.

für jeden Wert y der Umgebung von y_0 in bezug auf die Umgebung des Punktes $x = x_0$) gleichmäßig konvergiert, wenn die beiden Bedingungen $|x_0| < X$ und $|y_0| < R'_{x_0}$ erfüllt sind.

Speziell ergibt sich hieraus noch folgende Darstellung des Bereiches der absoluten Konvergenz von $\mathfrak{P}(x, y)$: *Der (größte) zu r assoziierte Radius r' der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ ist gleich der unteren Grenze der sämtlichen Größen R'_x des Gebietes $|x| < r$.* Entsprechend ist selbstverständlich bei der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$ der zu $\overline{r}$ assoziierte Radius $\overline{r}'$ identisch mit der unteren Grenze aller Größen R'_x des Gebietes $|x - x_0| < \overline{r}$.

§ 13.

Zur Veranschaulichung der gegenseitigen Lage der Konvergenzbereiche mag hier noch ein Beispiel möglichst einfacher Art behandelt werden.

Es sei $f(x)$ eine beliebige, im Gebiet $|x| < 3$ eindeutige, und außer im Punkt $x = 1$ daselbst auch reguläre analytische Funktion von x; und zwar gelte:

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu x^\mu \qquad \text{für } |x| < 1.$$

Ist nun x ein beliebiger Wert, dessen absoluter Betrag kleiner als 1 ist, so hat man für die Umgebung desselben die Entwickelung

$$f(x + y) = f(x) + \frac{y}{1!} f'(x) + \frac{y^2}{2!} f''(x) + \dots$$
$$|y| < |1 - x|$$

welche auch als die *Zeilenreihe* der (symmetrischen) Potenzreihe zweier Veränderlichen

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(x, y) = \quad & c_0 \;\; + c_1 x \;\; + c_2 x^2 \;\; + \dots \\ & + c_1 y + 2 c_2 x y + 3 c_3 x^2 y + \dots \\ & + c_2 y^2 + 3 c_3 x y^2 + 6 c_4 x^2 y^2 + \dots \\ & + \;\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

aufgefaßt werden kann. Die Konvergenzbereiche der letzteren lassen sich sämtlich sofort angeben. Zunächst ist die Summe der absoluten Beträge der Terme (nach Diagonalen geordnet) gleich

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} |c_\lambda| \cdot \{|x| + |y|\}^\lambda,$$

und demnach wird der *Bereich der absoluten Konvergenz* von $\mathfrak{P}(x, y)$ dargestellt durch

$$|x| + |y| < 1.$$

Die Beziehung zwischen den assoziierten Radien lautet also

$$r + r' = 1$$

und die beiden Maximalradien R, R' sind gleich 1, die beiden Minimalradien R_0, R_0' gleich 0.

Aus $R_0 = 0$, $R_0' = 0$ folgt weiter (§ 7), daß *bedingte Konvergenz* außer etwa am Rande des Bereiches der absoluten Konvergenz nirgends eintreten kann.

Die *Zeilenreihe* (d. h. die oben für $f(x + y)$ aufgestellte Entwickelung) konvergiert im Gebiet

$$|x| < 1, \quad |y| < |1 - x|,$$

analog die *Kolonnenreihe* im Gebiet

$$|y| < 1, \quad |x| < |1 - y|$$

und endlich die *Diagonalenreihe* offenbar für

$$|x + y| < 1.$$

Wird also speziell $y = y_0$ (zunächst $|y_0| < 1$) angenommen, so sind

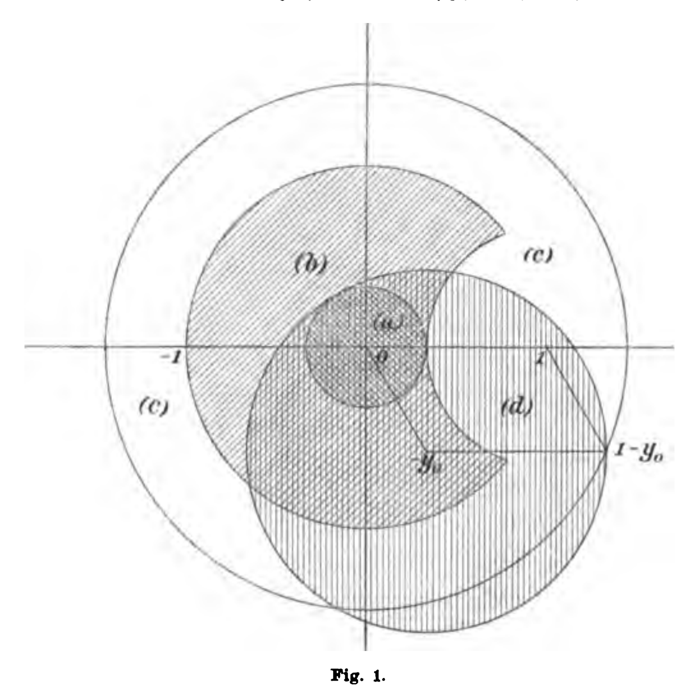


Fig. 1.

die zugehörigen Konvergenzbereiche in der x-Ebene (vgl. Fig. 1, wo $y_0 = \frac{2}{3} e^{\frac{2i\pi}{3}}$ gewählt ist):

(a) für die absolute Konvergenz der Doppelreihe: $|x| < 1 - |y_0|$

(b) „ „ Konvergenz der Zeilenreihe: $|x| < 1$, $|1 - x| > |y_0|$

(c) „ „ „ „ Kolonnenreihe: $|x| < |1 - y_0|$

(d) „ „ „ „ Diagonalenreihe: $|x + y_0| < 1$.

Nimmt man jedoch $|y_0| > 1$ an, so verschwinden die Bereiche (a) und (c), während (b) und (d) den Nullpunkt nicht mehr enthalten. (Fig. 2, woselbst $y_0 = \frac{7}{6} e^{\frac{2i\pi}{3}}$.)

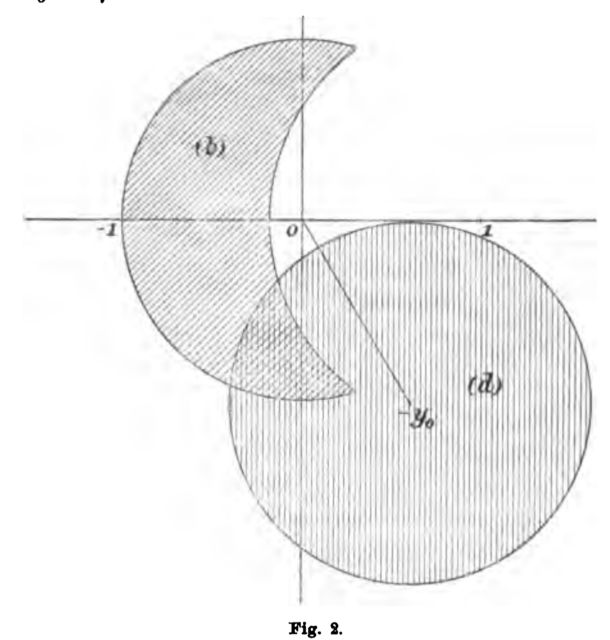


Fig. 2.

Sobald $|y_0| > 2$ wird, verschwindet auch (b), während (d) nach wie vor ein Kreis mit dem Radius 1 um den Punkt $x = -y_0$ bleibt.

Ist $x = x_0$ eine beliebige Stelle im Innern des Einheitskreises, und werden sämtliche Zeilen von $\mathfrak{P}(x, y)$ nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt, so ist die so erhaltene neue Doppelreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$ von demselben Typus wie $\mathfrak{P}(x, y)$; der Konvergenzradius ihrer Zeilen und Kolonnen hat jedoch den Wert $|1 - x_0|$. Die Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$ konvergiert also absolut für

$$|x - x_0| + |y| < |1 - x_0|$$

und ihr Maximalradius in der y-Ebene ist

$$R'_{x_0} = |1 - x_0|.$$

Die Gesamtheit der Stellen x, in deren Umgebung $P(x, y_0)$ *gleichmäßig* konvergiert, wird also (§ 12) ausgedrückt durch die Ungleichung

$$R'_x = |1 - x| > y_0$$

und fällt daher mit dem Konvergenzbereich (b) von $P(x, y_0)$ zusammen; die Konvergenz von $P(x, y)$ ist folglich überall eine gleichmäßige. Ist also $x = x_0$ ein beliebiger Punkt von (b), so konvergiert (§ 12) die Doppelreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$ für $|y| < |y_0|$ im Gebiet $|x - x_0| < r$ absolut, wo r den

Radius des größten Kreises um $x = x_0$ bedeutet, dessen Inneres noch zu (b) gehört, speziell also $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiet (a).

Hat $f(x)$ im Gebiet $|x| < 3$ *zwei* singuläre Stellen $x = 1$ und $x = -1$, so wird der Konvergenzbereich der Zeilenreihe bestimmt durch die Ungleichungen

$$|x| < 1, \quad |y| < |x - 1|, \quad |y| < |x + 1|.$$

Wählt man also speziell $y = y_0$ so, daß

$$1 < |y_0| < \sqrt{2}$$

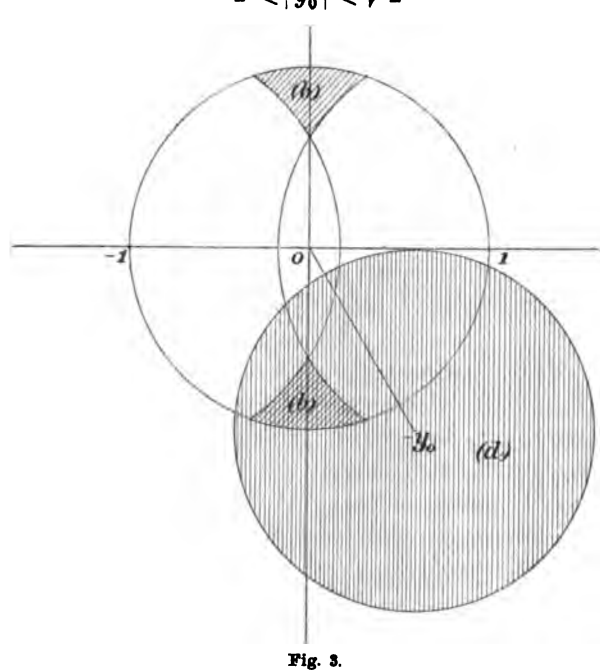


Fig. 3.

so besteht der Bereich (b) aus zwei getrennten Stücken. (Fig. 3, woselbst $y_0 = \frac{7}{6} e^{\frac{2 i \pi}{3}}$.)

IV. Konvergenz der Diagonalenreihe.

§ 14.

Die Diagonalenreihe $D(x, y)$ einer Potenzreihe kann, wie schon aus dem soeben besprochenen Beispiel ersichtlich, in Bereichen konvergieren, in welchen weder eine Konvergenz der Doppelreihe noch der Zeilen- oder Kolonnenreihe stattfindet, so daß eine gesonderte Behandlung derselben gerechtfertigt erscheint. Andererseits zeigt sich die Konvergenz der Diagonalenreihe, verglichen mit der der Zeilenreihe, insofern enger mit der absoluten Konvergenz der Doppelreihe verknüpft, als es, wie sich ergeben wird, nur dann irgend einen Bereich $\mathfrak{T}$ geben kann, in welchem $D(x, y)$ durchweg konvergiert, wenn auch die Doppelreihe selbst einen Bereich der absoluten Konvergenz besitzt.

Ist ξ, η irgend ein Wertepaar von der Eigenschaft, daß die Summe

$$D(x, y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Delta_\lambda(x, y)$$

wo

$$\Delta_\lambda(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_\mu^{(\lambda-\mu)} x^\mu y^{\lambda-\mu}$$

in jedem Punkt $(\varkappa\xi, \varkappa\eta)$ *konvergiert*, wenn $|\varkappa| < 1$, dagegen *divergiert*, wenn $|\varkappa| > 1$, so besitzt die Potenzreihe in $\varkappa$

$$D(\varkappa\xi, \varkappa\eta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Delta_\lambda(\xi, \eta) \varkappa^\lambda$$

notwendig den Konvergenzradius 1; zwischen ξ und η besteht daher die Relation

$$\overline{\lim} \sqrt[\lambda]{|\Delta_\lambda(\xi, \eta)|} = 1,$$

und umgekehrt zieht das Bestehen derselben die obige Aussage nach sich.[1])

Nimmt man η sowie y von null verschieden an, und führt vermittels der Gleichung

$$\xi = \eta z$$

---

1) Dagegen ist hier nicht etwa ein Schluß hinsichtlich der Konvergenz für die *Gesamtheit* der Stellen $|x| < \xi$, $|y| < \eta$, bzw. hinsichtlich der Divergenz für die *Gesamtheit* der Stellen $|x| > \xi$, $|y| > \eta$ gestattet.

den Parameter z ein, so geht die Relation über in

$$\frac{1}{|\eta|} = \overline{\lim} \sqrt[\lambda]{|\Delta_\lambda(z, 1)|} = \overline{\lim} \sqrt[\lambda]{|D_\lambda(z)|}$$

wenn wie früher

$$\Delta_\lambda(x, y) = D_\lambda\left(\frac{x}{y}\right) y^\lambda$$

gesetzt wird; und die Diagonalenreihe $D(x, y)$ konvergiert [bzw. divergiert] in jedem Punkt, dessen Koordinaten den Bedingungen $\frac{x}{y} = z$, $|y| < \eta$ [bzw. $|y| > \eta$] genügen.

Wie schon diese Verhältnisse vermuten lassen, empfiehlt es sich, die Diagonalenreihe, wofern nur der Wert $y = 0$ von der Betrachtung ausgeschlossen bleibt, durch die Substitution $x = yz$ von vornherein auf die Form

$$D(x, y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} D_\lambda(z) y^\lambda$$

zu bringen, welche als die *Zeilenreihe* einer Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(z, y)$ angesehen werden kann, in deren λ^{ter} Zeile höchstens die λ ersten Terme von 0 verschieden sind. Es lassen sich alsdann die sämtlichen bei den Zeilenreihen gewonnenen Resultate hier zur Anwendung bringen.

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(z, y)$ hat überdies die besondere Eigenschaft, daß für sie nicht nur die Konvergenzradien sämtlicher Zeilen (und daher auch die sonst mit X bezeichnete untere Grenze derselben), sondern auch der *Maximalradius* der z-Ebene (§ 4) selbst stets unendlich groß ist (vorausgesetzt, daß $\mathfrak{P}_1(z, y)$ überhaupt in irgend einem Punkte absolut konvergiert, dessen Koordinaten beide nicht 0 sind). Und zwar gilt, wenn man mit $\varrho' = \varphi(\varrho)$ den zu einem Radius ϱ der z-Ebene assoziierten Radius der y-Ebene bezeichnet, stets die Beziehung

$$\varphi(k\varrho) \geqq k^{-1}\varphi(\varrho), \qquad k \geqq 1.$$

Konvergiert nämlich die Doppelreihe $\mathfrak{P}_1(z, y)$ absolut, so gilt offenbar das gleiche auch von der Doppelreihe $\mathfrak{P}_1(kz, k^{-1}y)$, da keiner ihrer Terme den entsprechenden von $\mathfrak{P}_1(z, y)$ dem absoluten Betrage nach übertrifft.[1])

Dies hat weiter zur Folge, daß die bei beliebigen Potenzreihen für den Fall $0 < r < R$ gültige Beziehung (§ 4)

$$\overline{\lim} \sqrt[\nu]{g_\nu} = \overline{\lim} \sqrt[\nu]{p_\nu(r)}$$

hier ohne Beschränkung stattfindet; es gilt also, wenn entsprechend

$$\gamma_\lambda = \underset{|z|=\varrho}{\operatorname{Max}} |D_\lambda(z)|$$

---

1) Sind r, r' assoziierte Radien von $\mathfrak{P}(x, y)$, so sind offenbar $\frac{r}{r'}$, r' assoziierte Radien von $\mathfrak{P}_1(z, y)$, und umgekehrt.

und

$$d_\lambda(\varrho) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} |a_\mu^{(\lambda-\mu)}| \varrho^\mu$$

bezeichnet wird, die Relation

$$\overline{\lim} \sqrt[\lambda]{\gamma_\lambda} = \overline{\lim} \sqrt[\lambda]{d_\lambda(\varrho)}$$

für jeden positiven Wert von ϱ (wie hier auch auf direktem Wege leicht erkannt werden kann), und zugleich ist dies der reziproke Wert des zu ϱ assoziierten Radius ϱ'.

Wir wollen nun (analog dem Verfahren bei den Zeilenreihen) die sämtlichen Potenzreihen $\mathfrak{P}(x, y)$ hinsichtlich des Verhaltens ihrer Diagonalenreihe $D(x, y)$ in zwei Klassen sondern, und zwar eine vorgelegte Potenzreihe der einen oder der andern Klasse zuweisen, jenachdem es in der x-Ebene einen Bereich B (bzw. in der z-Ebene einen Bereich B'') gibt, in welchem die Diagonalenreihe für irgend einen (von 0 verschiedenen) Wert $y = y_0$ durchweg konvergiert, oder nicht.[1])

Besitzt die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ einen Bereich der absoluten Konvergenz (d. h. konvergiert sie in irgend einem Punkte absolut, dessen Koordinaten beide nicht 0 sind), so gehört sie offenbar zur ersteren Klasse. *Es gilt jedoch auch das Umgekehrte.* Konvergiert nämlich $D(x, y)$ für $y = y_0$ im Bereich B'' der z-Ebene, so ist nach § 10 die Konvergenz von $D(x, y)$, solange $|y| < |y_0|$, eine gleichmäßige mindestens in bezug auf einen gewissen Teilbereich B_0'' von B''. Ist also $z = z_0$ ein beliebiger innerer Punkt von B_0'', und werden die Zeilen $D_\lambda(z)$ von $\mathfrak{P}_1(z, y)$ nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelt, so konvergiert (§ 12) die so erhaltene neue Doppelreihe $\overline{\mathfrak{P}}_1(z - z_0, y)$ sicher absolut für $|z - z_0| < \varrho$, $|y| < |y_0|$, solange die Fläche $|z - z_0| < \varrho$ noch zu B_0'' gehört. Da aber die Doppelreihe $\overline{\mathfrak{P}}_1(z - z_0, y)$ von demselben Typus ist wie $\mathfrak{P}_1(z, y)$, ihr Maximalradius in der z-Ebene also ebenfalls unendlich groß ist, so konvergiert sie für hinreichend kleine Werte von y auch noch in der Umgebung der Stelle $z - z_0 = -z_0$ d. h. der Stelle $z = 0$ absolut, und das gleiche gilt somit[2]) auch für die Doppelreihe $\mathfrak{P}_1(z, y)$ selbst, deren absolute Konvergenz aber mit derjenigen von $\mathfrak{P}(x, y)$ gleichbedeutend ist.

---

1) Zu der letzteren Klasse gehören zunächst alle Doppelreihen, deren Diagonalenreihe (außer etwa für $x = 0$ und für $y = 0$) nirgends konvergiert. Ein weiteres Beispiel ist $D_\lambda(z) = \lambda! \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_\lambda}\right)$, wo die Werte $z_1, z_2, \ldots$ völlig beliebig gewählt seien. $D(x, y)$ konvergiert sicher, sobald z einen der Werte $z_1, z_2, \ldots$ annimmt. Dagegen kann die Doppelreihe, deren erste Kolonne $\Sigma \nu!\, y^\nu$ lautet, (außer für $y = 0$) niemals absolut konvergieren, so daß sie nach dem nächstfolgenden Satze zur zweiten Klasse gehören muß. (Über die Bezeichnung der Bereiche vgl. p. 8, Fußn.)

2) Nach dem Satze über abgeleitete Potenzreihen in § 6, oder auch durch Betrachtung der den beiden Potenzreihen $\overline{\mathfrak{P}}_1(z - z_0, y)$ und $\mathfrak{P}_1(z, y)$ gemeinsamen Zeilenreihe mit Anwendung von § 12.

Aus den für die Zeilenreihen geltenden Sätzen ergeben sich hier unmittelbar die folgenden:

Konvergiert die *Diagonalenreihe* $D(x, y)$ für $y = y_0$ (oder für $|y| < |y_0|$) *gleichmäßig* in bezug auf die Kreisfläche $|x| \leqq r$ (oder in bezug auf die Kreisperipherie $|x| = r$), so konvergiert die *Doppelreihe* $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiet $|x| < r$, $|y| < |y_0|$ (die Doppelreihe $\mathfrak{P}_1(z, y)$ im Gebiet $|z| \leqq \frac{r}{|y_0|}$[1]), $|y| < |y_0|$) *absolut.*

Für die absolute Konvergenz der Doppelreihe in einem Kreisgebiet $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ um den Nullpunkt ist mithin die gleichmäßige Konvergenz der Diagonalenreihe in bezug auf x[2]) (oder in bezug auf y) innerhalb dieses Gebietes notwendig und hinreichend.

Im Anschlusse hieran möge über die gleichmäßige Konvergenz der Diagonalenreihe folgende Bemerkung eingeschaltet werden. Ist T ein beliebiger Bereich in der x-Ebene, T' ein solcher in der y-Ebene, und konvergiert die Diagonalenreihe für jeden Wert y des Bereiches T' gleichmäßig in bezug auf die Umgebung eines jeden Punktes von T, so konvergiert sie auch *in bezug auf die volle Umgebung einer jeden Stelle* (x, y) *des so definierten Bereiches* $\mathfrak{T}$ *gleichmäßig.* Denn ist (x', y') ein beliebiger Punkt des Bereiches $\mathfrak{T}$, und bestimmt man eine Größe $\varkappa$, deren absoluter Betrag oberhalb 1 liegt, so, daß der Punkt $x_0 = \varkappa x'$, $y_0 = \varkappa y'$ dem Bereiche $\mathfrak{T}$ ebenfalls noch angehört, so konvergiert, wenn man den Fall $y' = 0$ zunächst ausschließt, die Reihe $D(x, y) = \sum_\lambda D_\lambda(z) y^\lambda$ für $y = y_0$ gleichmäßig in bezug auf die Umgebung des Punktes $x = x_0$, oder auch für $y = y_0$ gleichmäßig in bezug auf die Umgebung des Punktes $z' = \frac{x_0}{y_0} = \frac{x'}{y'}$ der z-Ebene, infolgedessen aber auch gleichmäßig in bezug auf die Gesamtheit der Wertepaare y, z, welche aus der vorigen entsteht, wenn man die Bedingung $y = y_0$ durch $|y| \leqq k\,|y'|$ ersetzt $(1 < k < |\varkappa|)$, speziell also auch gleichmäßig in bezug auf die volle Umgebung des Punktes $y = y'$, $z = z'$, und somit endlich auch gleichmäßig in bezug auf eine gewisse Umgebung des Punktes (x', y'). Ist jedoch $y' = 0$, und gehört der Punkt $x = x_0$ $(|x_0| > |x'|)$ dem Bereich T, sowie der Kreis mit dem Radius ϱ' um $y = 0$ dem Bereich T' noch an, so ergibt sich zunächst aus dem Voranstehenden die gleichmäßige Konvergenz von $D(x_0, y)$ in bezug auf die Umgebung jedes Punktes y, für welchen $|y| = \varrho'$ ist, mithin[3]) auch diejenige in bezug auf die Kreisperipherie $|y| = \varrho'$ selbst, und somit nach dem obigen Satz die absolute Konvergenz der Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiet $|x| < |x_0|$, $|y| < \varrho'$, speziell also die gleichmäßige Konvergenz von $D(x, y)$ in bezug auf die Umgebung des Punktes $(x', 0)$.

---

1) Nach dem oben Bemerkten hier ohne Beschränkung gültig.

2) S. p. 34, Fußnote 3).

3) Vgl. p. 32, Fußnote 1).

Ist $z = z_0$ innerer Punkt eines beliebigen Bereiches B'' der z-Ebene, und werden die ganzen Funktionen $D_\lambda(z)$ nach Potenzen von $z - z_0$ umgeordnet, so möge die so aus $\mathfrak{P}_1(z, y)$ entstehende neue Doppelreihe wie oben mit $\overline{\mathfrak{P}}_1(z - z_0, y)$ bezeichnet werden. Konvergiert alsdann die *Diagonalenreihe* $D(x, y)$ für $|y| < \varrho'$ *gleichmäßig* in bezug auf den Bereich B'' der z-Ebene (oder in bezug auf dessen Randkurve), so konvergiert die *Doppelreihe* $\overline{\mathfrak{P}}_1(z - z_0, y)$ im Gebiet $|z - z_0| \leqq \varrho$, $|y| < \varrho'$ *absolut* und stimmt daselbst dem Werte nach mit $D(x, y)$ überein. Dabei ist ϱ der Radius des größten noch in B'' gelegenen Kreises um $z = z_0$.

Ist $z = z_0$ ein beliebiger Punkt der z-Ebene, und bezeichnet man den Maximalradius der Doppelreihe $\overline{\mathfrak{P}}_1(z - z_0, y)$ in der y-Ebene mit P'_{z_0}, so erfüllt die Gesamtheit der Werte y, für welche $D(x, y)$ in bezug auf die Umgebung des Punktes z_0 gleichmäßig konvergiert, einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius P'_{z_0}. Der Bereich der gleichmäßigen Konvergenz von $D(x, y)$ läßt sich daher nach Einführung der Hilfsgröße z in genau der gleichen Weise darstellen, wie es in § 12 bei der Zeilenreihe geschehen ist. *Es findet nämlich dann und nur dann in der Umgebung eines Punktes* (x, y) *gleichmäßige Konvergenz von* $D(x, y)$ *statt, wenn eine der beiden Bedingungen* $0 < |y| < \mathsf{P}'_z$ *oder* $y = 0$, $|x| < R$ *erfüllt ist.* (Dabei bedeutet R den Maximalradius der Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ in der x-Ebene.)

Faßt man die charakteristischen Unterschiede zwischen den Potenzreihen der oben definierten beiden Klassen zusammen, so ergibt sich das folgende Resultat. Während bei den Potenzreihen der einen Klasse $D(x, y)$ für keinen von null verschiedenen Wert von y in irgend einem Bereich B'' der z-Ebene durchweg konvergiert, so findet bei denen der anderen Klasse in jedem beliebig vorgeschriebenen Bereich der z-Ebene bei geeigneter Beschränkung des absoluten Betrages von y gleichmäßige Konvergenz von $D(x, y)$ statt. Bei den Potenzreihen der letzteren Klasse ferner ist $\overline{\lim} \sqrt[\lambda]{d_\lambda(\varrho)} = \overline{\lim} \sqrt[\lambda]{\gamma_\lambda}$ endlich und stetig für jeden endlichen Wert von ϱ, bei denen der ersteren hingegen unendlich groß für jedes $\varrho > 0$; und zwar beides auch bei Annahme eines beliebigen anderen Nullpunkts in der z-Ebene. Endlich können diejenigen Potenzreihen, die zur ersteren Klasse gehören, selbst (außer event. für $x = 0$ oder für $y = 0$) nirgends absolut konvergieren (d. h. $R = R' = 0$), während diejenigen der zweiten Klasse stets einen Bereich der absoluten Konvergenz besitzen ($R > 0$, $R' > 0$).

V. Darstellung der analytischen Funktionen zweier Veränderlichen durch absolut konvergente Potenzreihen. Der Cauchy-Laurentsche Satz. Singuläre Stellen.

§ 15.

Wir bedienen uns bei den hier folgenden Untersuchungen der von Herrn A. Pringsheim[1]) zum Zwecke einer elementaren Herleitung des Laurentschen Satzes in die Funktionentheorie eingeführten Methode.

Es sei eine von x und y abhängige Größe $f(x, y)$ eindeutig definiert für alle Wertsysteme (x, y), für welche gleichzeitig $|x| = \varrho$, $|y| = \varrho'$ ist, und es werde gesetzt

$$\mathfrak{M}_m^{(n)} f(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\alpha_m^\mu \varrho, \alpha_n^\nu \varrho') \qquad \left(\alpha_\lambda = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}}\right)$$

Ist dann $f(x, y)$ im Gebiete $|x| = \varrho$, $|y| = \varrho'$ stetig, d. h. gibt es nach Annahme von $\varepsilon > 0$ stets eine positive Größe δ derart, daß

$$(1.) \qquad |f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon$$

sobald die Bedingungen

$$|x| = |x'| = \varrho, \quad |y| = |y'| = \varrho', \quad |x' - x| < \delta, \quad |y' - y| < \delta$$

sämtlich erfüllt sind, *so läßt sich zeigen, daß der Grenzwert*

$$\mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} f(x, y) = \lim_{m, n = \infty} \mathfrak{M}_m^{(n)} f(x, y)$$

(in dem in § 1 angegebenen Sinne) *stets existiert.*

Bezeichnet man nämlich mit k, l zwei beliebige positive ganze Zahlen, so hat man

$$\mathfrak{M}_{km}^{(ln)} f(x,y) - \mathfrak{M}_m^{(n)} f(x,y) = \frac{1}{klmn} \sum_{\mu, \nu, \varkappa, \lambda} \left\{ f(\alpha_{km}^{k\mu+\varkappa} \varrho, \alpha_{ln}^{l\nu+\lambda} \varrho') - f(\alpha^{k\mu}_{m} \varrho, \alpha_{ln}^{l\nu} \varrho') \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, m-1; & \varkappa = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \nu = 0, 1, \ldots, n-1; & \lambda = 0, 1, \ldots, l-1 \end{pmatrix}$$

---

1) *Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Funktionen.* Math. Ann. 47 (1896) p. 121.

Fixiert man nun nach Annahme von $\varepsilon > 0$ zwei positive Zahlen m_0, n_0 derart, daß, nachdem δ gemäß (1.) bestimmt ist, die Bedingungen

$$|\alpha_m - 1|\varrho < \delta \text{ für } m \geqq m_0; \quad |\alpha_n - 1|\varrho' < \delta \text{ für } n \geqq n_0$$

erfüllt werden, so erhält man für $m \geqq m_0$, $n \geqq n_0$

$$|\alpha_{km}^{k\mu+\varkappa}\varrho - \alpha_{km}^{k\mu}\varrho| = |\alpha_{km}^{\varkappa} - 1|\varrho < \delta \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1)$$

nebst einer analogen Ungleichung für die zweiten Argumente, so daß für jedes Wertsystem $\mu, \nu, \varkappa, \lambda$

$$|f(\alpha_{km}^{k\mu+\varkappa}\varrho,\ \alpha_{ln}^{l\nu+\lambda}\varrho') - f(\alpha_{km}^{k\mu}\varrho,\ \alpha_{ln}^{l\nu}\varrho')| < \varepsilon$$

und daher auch

$$|\mathfrak{M}_{km}^{(ln)} f(x, y) - \mathfrak{M}_m^{(n)} f(x, y)| < \varepsilon \qquad (m \geqq m_0,\ n \geqq n_0)$$

wird. Ist nun m', n' irgend ein zweites, den Bedingungen $m' \geqq m_0$, $n' \geqq n_0$ genügendes Wertepaar, so folgt schließlich aus den beiden Ungleichungen

$$|\mathfrak{M}_{mm'}^{(nn')} f(x, y) - \mathfrak{M}_m^{(n)} f(x, y)| < \varepsilon, \quad |\mathfrak{M}_{mm'}^{(nn')} f(x, y) - \mathfrak{M}_{m'}^{(n')} f(x, y)| < \varepsilon$$

daß

$$|\mathfrak{M}_{m'}^{(n')} f(x, y) - \mathfrak{M}_m^{(n)} f(x, y)| < 2\varepsilon \qquad \text{für} \begin{cases} m, m' \geqq m_0 \\ n, n' \geqq n_0 \end{cases}.$$

Dies ist aber, da ε beliebig vorgeschrieben war, gerade die Bedingung für die Konvergenz der Doppelfolge $\mathfrak{M}_m^{(n)} f(x, y)$.

Denkt man sich speziell in $f(x, y)$ der Veränderlichen y einen bestimmten Wert $y = y_0$ beigelegt, so daß $f(x, y_0)$ von y, und infolgedessen $\mathfrak{M}_m^{(n)} f(x, y_0)$ von n unabhängig wird, so ergibt sich hieraus rückwärts die Existenz des *einfachen Mittelwertes*

$$\underset{|x|=\varrho}{\mathfrak{M}} f(x, y) = \lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} f(\alpha_m^\mu \varrho, y).$$

Unmittelbar aus der Definition des *Doppelmittelwertes* $\underset{\varrho, \varrho'}{\mathfrak{M}} f(x, y)$ ergeben sich die Beziehungen:

$$\underset{\varrho, \varrho'}{\mathfrak{M}} (1) = 1$$

$$\underset{\varrho, \varrho'}{\mathfrak{M}} (K f(x, y)) = K \underset{\varrho, \varrho'}{\mathfrak{M}} f(x, y)$$

wenn K im Gebiete $|x| = \varrho$, $|y| = \varrho'$ von x und y unabhängig ist, und

$$\underset{\varrho, \varrho'}{\mathfrak{M}} \sum_{\mu=0}^{m} \varphi_\mu(x, y) = \sum_{\mu=0}^{m} \underset{\varrho, \varrho'}{\mathfrak{M}} \varphi_\mu(x, y),$$

wenn man mit $\varphi_\mu(x, y)$ $(\mu = 0, 1, \ldots, m)$ Funktionen der gleichen Art wie $f(x, y)$ bezeichnet.

Die letztere Relation bleibt auch noch für $m = \infty$ gültig, wenn die Summe im Gebiet $|x| = \varrho$, $|y| = \varrho'$ *gleichmäßig* konvergiert. Wir beweisen dies gleich für eine *Doppelreihe*, welche im Gebiet $|x| = \varrho$, $|y| = \varrho'$ gleichmäßig konvergiert, und deren Terme $\varphi_\mu^{(\nu)}(x, y)$ ebenfalls die obigen Voraussetzungen erfüllen:

$$\mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} \varphi_\mu^{(\nu)}(x, y) = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} \mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} \varphi_\mu^{(\nu)}(x, y). \tag{2.}$$

Zunächst folgt nämlich aus der gleichmäßigen Konvergenz der Doppelreihe $\sum_{\mu, \nu} \varphi_\mu^{(\nu)}(x, y)$ im Gebiet $|x| = \varrho$, $|y| = \varrho'$ die Stetigkeit ihrer Summe $\varphi(x, y)$ in dem genannten Gebiete, und somit die Existenz des *Doppelmittelwertes* $\mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} \varphi(x, y)$. Sodann gibt es nach Annahme von $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen m_0, n_0 derart, daß für $m \geqq m_0$, $n \geqq n_0$

$$\left| \varphi(x, y) - \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\mu^{(\nu)}(x, y) \right| < \varepsilon \qquad (|x| = \varrho, \ |y| = \varrho')$$

woraus

$$\left| \mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} \left\{ \varphi(x, y) - \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\mu^{(\nu)}(x, y) \right\} \right| \leqq \varepsilon$$

oder

$$\left| \mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} \varphi(x, y) - \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} \varphi_\mu^{(\nu)}(x, y) \right| \leqq \varepsilon$$

was mit der Behauptung gleichbedeutend ist.

Der Zusammenhang des Doppelmittelwertes mit den einfachen Mittelwerten kann in der folgenden Weise ausgedrückt werden. Ist, wie bisher vorausgesetzt wurde, $f(x, y)$ im Gebiete $|x| = \varrho$, $|y| = \varrho'$ stetig, so existiert nicht nur der *Doppelmittelwert* $\mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} f(x, y)$, sondern auch die *iterierten Mittelwerte* $\mathfrak{M}_{|x| = \varrho} \mathfrak{M}_{|y| = \varrho'} f(x, y)$ und $\mathfrak{M}_{|y| = \varrho'} \mathfrak{M}_{|x| = \varrho} f(x, y)$, *und zwar stimmen sie dem Werte nach mit ersterem überein.*

Da nämlich die Existenz des Grenzwertes

$$\begin{aligned} \lim_{m = \infty} \mathfrak{M}_m^{(n)} f(x, y) &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ \lim_{m = \infty} \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} f(\alpha_m^\mu \varrho, \ \alpha_n^\nu \varrho') \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{M}_{|x| = \varrho} f(x, \alpha_n^\nu \varrho') \end{aligned} \tag{3.}$$

feststeht, also nicht nur die Doppelfolge $\mathfrak{M}_m^{(n)} f(x, y)$ selbst, sondern auch jede ihrer Zeilen einen endlichen Grenzwert besitzt, so existiert nach einem

allgemeinen Satze über Doppelfolgen[1]) auch der Grenzwert der so entstehenden Grenzwertreihe und stimmt mit dem Grenzwert der Doppelfolge überein, in Zeichen:

$$\lim_{n=\infty} \lim_{m=\infty} \mathfrak{M}_m^{(n)} f(x, y) = \lim_{m, n=\infty} \mathfrak{M}_m^{(n)} f(x, y).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber nach (3.) nichts anderes als

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{M}_{|x|=\varrho} f(x, \alpha_n^\nu \varrho') = \mathfrak{M}_{|y|=\varrho'} \mathfrak{M}_{|x|=\varrho} f(x, y)$$

und man erhält somit die behauptete Relation

$$\mathfrak{M}_{|y|=\varrho'} \mathfrak{M}_{|x|=\varrho} f(x, y) = \mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} f(x, y). \text{ —} \tag{4.}$$

Sind μ und ν zwei beliebige positive oder negative ganze Zahlen (einschließlich 0), so gilt stets, außer in dem einzigen Falle $\mu = \nu = 0$:

$$\mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} (x^\mu y^\nu) = 0. \tag{5.}$$

Denn ist z. B. $\mu \gtrless 0$, so hat man

$$\mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} (x^\mu y^\nu) = \mathfrak{M}_{|y|=\varrho'} \mathfrak{M}_{|x|=\varrho} (x^\mu y^\nu) = \mathfrak{M}_{|y|=\varrho'} \left\{ y^\nu \mathfrak{M}_{|x|=\varrho} x^\mu \right\} = 0$$

da

$$\mathfrak{M}_{|x|=\varrho} x^\mu = 0 \qquad \text{für } \mu \gtrless 0. \text{ —}$$

Es sei jetzt die Funktion $f(x, y)$ in dem ganzen Gebiete

$$\mathsf{P}_0 \leqq |x| \leqq \mathsf{P}, \qquad \mathsf{P}_0' \leqq |y| \leqq \mathsf{P}'$$

eindeutig definiert und besitze die folgenden Eigenschaften:

1. Sie sei in diesem Gebiete stetig.
2. Für jeden der angegebenen Werte von y sei sie eine an jeder Stelle x des obigen Bereiches reguläre analytische Funktion von x, und vice versa.

Alsdann existiert der Mittelwert $\mathfrak{M}_{\varrho, \varrho'} f(x, y)$ und *ist von der Wahl von ϱ und ϱ' unabhängig*, solange nur

$$\mathsf{P}_0 \leqq \varrho \leqq \mathsf{P}, \qquad \mathsf{P}_0' \leqq \varrho' \leqq \mathsf{P}'.$$

Beweis. Ist auch $\mathsf{P}_0 \leqq \varrho_1 \leqq \mathsf{P}$, $\mathsf{P}_0' \leqq \varrho_1' \leqq \mathsf{P}'$, so gelten vermöge der Eigenschaften des einfachen Mittelwertes die Beziehungen

$$\mathfrak{M}_{|x|=\varrho_1} f(x, y) = \mathfrak{M}_{|x|=\varrho} f(x, y)$$

---

1) A. Pringsheim: Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. Math. Ann. 53 (1899), p. 313.

und

$$\underset{|y|=\varrho_1'}{\mathfrak{M}} f(x, y) = \underset{|y|=\varrho'}{\mathfrak{M}} f(x, y)$$

und folglich mit Anwendung von (4.):

$$\underset{|y|=\varrho'_1}{\mathfrak{M}} \underset{|x|=\varrho_1}{\mathfrak{M}} f(x, y) = \underset{|y|=\varrho_1'}{\mathfrak{M}} \underset{|x|=\varrho}{\mathfrak{M}} f(x, y) = \underset{|x|=\varrho}{\mathfrak{M}} \underset{|y|=\varrho_1'}{\mathfrak{M}} f(x, y)$$

$$= \underset{|x|=\varrho}{\mathfrak{M}} \underset{|y|=\varrho'}{\mathfrak{M}} f(x, y)$$

d. h.

$$\underset{\varrho_1, \varrho_1'}{\mathfrak{M}} f(x, y) = \underset{\varrho, \varrho'}{\mathfrak{M}} f(x, y).$$

§ 16.

Hauptsatz. Die Funktion $f(x, y)$ möge wiederum im Gebiete $P_0 \leqq |x| \leqq P$, $P_0' \leqq |y| \leqq P'$ den beiden soeben fixierten Bedingungen genügen. *Es existiert alsdann stets eine Doppelreihe*

$$\sum_{\mu, \nu = -\infty}^{+\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$$

welche im Gebiete $P_0 < |x| < P$, $P_0' < |y| < P'$ *absolut konvergiert*[1]) *und daselbst mit* $f(x, y)$ *übereinstimmt.* Dabei ist:

$$a_\mu^{(\nu)} = \underset{\varrho, \varrho'}{\mathfrak{M}} \{x^{-\mu} y^{-\nu} f(x, y)\}$$

wo ϱ und ϱ' nur den Bedingungen $P_0 \leqq \varrho \leqq P$, $P_0' \leqq \varrho' \leqq P'$ zu genügen haben.

Ist insbesondere $P_0 = 0$, so ist $a_\mu^{(\nu)} = 0$ $(\mu < 0)$ und die angegebene Entwicklung gilt im Gebiet $|x| < P$, $P_0' < |y| < P'$. Das Entsprechende findet im Falle $P_0' = 0$ statt. Ist $P_0 = P_0' = 0$, so erhält somit die Doppelreihe die Gestalt

$$\sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu = \mathfrak{P}(x, y)$$

und stimmt im ganzen Kreisgebiet $|x| < P$, $|y| < P'$ mit $f(x,y)$ überein.

Beweis. Bezeichnet man mit (x_0, y_0) irgend eine willkürlich gewählte Stelle des Bereiches $P_0 < |x| < P$, $P_0' < |y| < P'$, und setzt man

---

1) Die Reihe läßt sich als Summe von vier Bestandteilen

$$\mathfrak{P}_1(x, y) + \mathfrak{P}_2\left(x, \frac{1}{y}\right) + \mathfrak{P}_3\left(\frac{1}{x}, y\right) + \mathfrak{P}_4\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

auffassen, deren jeder eine in dem genannten Gebiete absolut konvergierende Potenzreihe der früher betrachteten Art ist.

$$\varphi_1(x, y) = xy \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{(x - x_0)(y - y_0)}, \quad \varphi_2(x, y) = xy \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)}$$

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) = xy \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)}$$

so ist der Ausdruck $x \dfrac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}$, als Funktion von x aufgefaßt, für alle Werte x des Bereiches $\mathsf{P}_0 \leqq |x| \leqq \mathsf{P}$ eindeutig und regulär, mithin auch der Ausdruck $\varphi_1(x, y)$, wenn nur $y \neq y_0$, also sicher solange $|y| = \mathsf{P}_0'$ oder $|y| = \mathsf{P}'$ ist. Mithin gilt

$$\underset{|x| = \mathsf{P}}{\mathfrak{M}} \varphi_1(x, y) = \underset{|x| = \mathsf{P}_0}{\mathfrak{M}} \varphi_1(x, y) \qquad (|y| = \mathsf{P}_0' \text{ oder } = \mathsf{P}').$$

Da ferner $\varphi_1(x, y)$ in den Gebieten $|x| = \mathsf{P}_0$ oder $= \mathsf{P}$, $|y| = \mathsf{P}_0'$ oder $= \mathsf{P}'$ stetig ist, und daher die bezüglichen vier Doppelmittelwerte wie auch die entsprechenden iterierten Mittelwerte existieren, so kann man von den Ausdrücken auf beiden Seiten der vorstehenden Gleichung den Mittelwert sowohl für $|y| = \mathsf{P}_0'$ als auch für $|y| = \mathsf{P}'$ bilden. Die Subtraktion der beiden so entstehenden Gleichungen ergibt mit Anwendung von (4.):

$$\underset{\mathsf{P}, \mathsf{P}'}{\mathfrak{M}} \varphi_1(x, y) - \underset{\mathsf{P}, \mathsf{P}_0'}{\mathfrak{M}} \varphi_1(x, y) - \underset{\mathsf{P}_0, \mathsf{P}'}{\mathfrak{M}} \varphi_1(x, y) + \underset{\mathsf{P}_0 \mathsf{P}_0'}{\mathfrak{M}} \varphi_1(x, y) = 0.$$

Genau die gleiche Mittelwertrelation erhält man jedoch, ausgehend von der Beziehung

$$\underset{|y| = \mathsf{P}'}{\mathfrak{M}} \varphi_2(x, y) = \underset{|y| = \mathsf{P}_0'}{\mathfrak{M}} \varphi_2(x, y)$$

auch für die Funktion $\varphi_2(x, y)$. Die Addition beider ergibt also schließlich:

$$(6.) \qquad \underset{\mathsf{P}, \mathsf{P}'}{\mathfrak{M}} \varphi(x, y) - \underset{\mathsf{P}, \mathsf{P}_0'}{\mathfrak{M}} \varphi(x, y) - \underset{\mathsf{P}_0, \mathsf{P}'}{\mathfrak{M}} \varphi(x, y) + \underset{\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_0'}{\mathfrak{M}} \varphi(x, y) = 0.$$

In jedem der vier Terme kann man nun den Ausdruk $\dfrac{xy}{(x - x_0)(y - y_0)}$ und sodann auch den Mittelwert selbst nach positiven bezw. negativen Potenzen von x_0 und y_0 entwickeln. Für den ersten Term hat man, da hier $|x_0| < |x|$, $|y_0| < |y|$,

$$\frac{xy}{(x - x_0)(y - y_0)} = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\mu} \left(\frac{y_0}{y}\right)^{\nu}$$

und folglich, da die Doppelreihe

$$xy \frac{f(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} f(x, y) \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\mu} \left(\frac{y_0}{y}\right)^{\nu}$$

im Gebiet $|x| = \mathsf{P}$, $|y| = \mathsf{P}'$ offenbar gleichmäßig konvergiert,

$$\underset{\mathsf{P}, \mathsf{P}'}{\mathfrak{M}} \left\{ xy \frac{f(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} \right\} = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} \underset{\mathsf{P}, \mathsf{P}'}{\mathfrak{M}} \{ x^{-\mu} y^{-\nu} f(x, y) \} x_0^{\mu} y_0^{\nu},$$

speziell, wenn an Stelle von $f(x, y)$ die Konstante $f(x_0, y_0)$ tritt, mit Anwendung von (5.):

$$\underset{\mathrm{P},\mathrm{P}'}{\mathfrak{M}}\left\{xy\frac{f(x_0, y_0)}{(x-x_0)(y-y_0)}\right\} = f(x_0, y_0)$$

also endlich

$$\underset{\mathrm{P},\mathrm{P}'}{\mathfrak{M}}\,\varphi(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x_0^\mu y_0^\nu - f(x_0, y_0),$$

wenn

$$a_\mu^{(\nu)} = \underset{\mathrm{P},\mathrm{P}'}{\mathfrak{M}}\{x^{-\mu}y^{-\nu}f(x, y)\}$$

oder (nach dem vorigen Satze)

$$= \underset{\varrho,\varrho'}{\mathfrak{M}}\{x^{-\mu}y^{-\nu}f(x, y)\} \qquad \begin{pmatrix}\mathrm{P}_0 \leqq \varrho \leqq \mathrm{P} \\ \mathrm{P}_0' \leqq \varrho' \leqq \mathrm{P}'\end{pmatrix}$$

gesetzt wird.

Auf dem gleichen Wege ergeben sich die drei analogen Relationen:

$$-\underset{\mathrm{P},\mathrm{P}_0'}{\mathfrak{M}}\,\varphi(x, y) = \sum_{\substack{\mu=0,1,2,\ldots \\ \nu=-1,-2,\ldots}} a_\mu^{(\nu)} x_0^\mu y_0^\nu$$

$$-\underset{\mathrm{P}_0,\mathrm{P}'}{\mathfrak{M}}\,\varphi(x, y) = \sum_{\substack{\mu=-1,-2,\ldots \\ \nu=0,1,2,\ldots}} a_\mu^{(\nu)} x_0^\mu y_0^\nu$$

$$\underset{\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_0'}{\mathfrak{M}}\,\varphi(x, y) = \sum_{\left.\begin{smallmatrix}\mu\\ \nu\end{smallmatrix}\right\}=-1,-2,\ldots} a_\mu^{(\nu)} x_0^\mu y_0^\nu$$

und schließlich durch Einsetzen der vier Ausdrücke in die Gleichung (6.), wenn noch x_0 durch x, y_0 durch y ersetzt wird:

$$f(x, y) = \sum_{\mu,\nu=-\infty}^{+\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu,$$

gültig für $\mathrm{P}_0 < |x| < \mathrm{P}$, $\mathrm{P}_0' < |y| < \mathrm{P}'$. In diesem Gebiete kann jedoch die Konvergenz nur eine *absolute* sein.[1]) (Nach § 6 ist sie daher auch eine *gleichmäßige* in bezug auf jeden Teilbereich $\mathfrak{B}$ dieses Gebietes.)

Legt man y einen speziellen Wert y_0 des Gebietes bei, so geht die Doppelreihe in eine einfache Laurentsche Entwicklung über:

$$f(x, y_0) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\mu^{(\nu)} y_0^\nu\right\}x^\mu, \quad (\mathrm{P}_0 < |x| < \mathrm{P})$$

---

1) Dies folgt sowohl direkt aus den Ergebnissen von § 7 über die Stellen bedingter Konvergenz, wie auch durch bloße Anwendung des in § 1 bewiesenen Satzes, da, wie aus der Herleitung sofort ersichtlich, auch alle Zeilen und Kolonnen in dem angegebenen Gebiete konvergieren.

Ist nun $\mathsf{P}_0 = 0$, d. h. $f(x, y_0)$ im Gebiete $|x| \leqq \mathsf{P}$ regulär, so können in dieser Entwicklung keine Glieder mit negativem Exponenten auftreten, also:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\mu^{(\nu)} y_0^\nu = 0 \qquad (\mu = -1, -2, \ldots)$$

und da dies für jeden Wert $y = y_0$ des Gebietes gilt, notwendig

$$a_\mu^{(\nu)} = 0 \qquad (\mu = -1, -2, \ldots),$$

und die Darstellung gilt im Gebiete $|x| < \mathsf{P}$, $\mathsf{P}_0' < |y| < \mathsf{P}'$.

Hiermit ist der Satz in dem oben ausgesprochenen Umfang erwiesen. Zugleich ergibt sich aus (6.) für $f(x, y)$ im Gebiete $\mathsf{P}_0 < |x| < \mathsf{P}$, $\mathsf{P}_0' < |y| < \mathsf{P}'$ die folgende *Darstellung in geschlossener Form*:

$$f(x_0, y_0) = \underset{\mathsf{P},\mathsf{P}'}{\mathfrak{M}} - \underset{\mathsf{P},\mathsf{P}_0'}{\mathfrak{M}} - \underset{\mathsf{P}_0,\mathsf{P}'}{\mathfrak{M}} + \underset{\mathsf{P}_0,\mathsf{P}_0'}{\mathfrak{M}}$$

die Mittelwerte sämtlich erstreckt über die Funktion

$$\frac{xy}{(x - x_0)(y - y_0)} \frac{f(x, y)}{}$$

Zusatz. Wird von der Funktion $f(x, y)$ nur vorausgesetzt, daß sie den beiden angegebenen Bedingungen im Gebiete $\mathsf{P}_0 < |x| < \mathsf{P}$, $\mathsf{P}_0' < |y| < \mathsf{P}'$ (d. h. in jedem Gebiete $\mathsf{P}_0 + \varepsilon \leqq |x| \leqq \mathsf{P} - \varepsilon$, $\mathsf{P}_0' + \varepsilon \leqq |y| \leqq \mathsf{P}' - \varepsilon$, wie klein auch $\varepsilon > 0$ angenommen werde) genügt, so gilt offenbar auch dann noch für dieses Gebiet die Entwicklung

$$f(x, y) = \sum_{\mu,\nu=-\infty}^{+\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu.$$

Bei dem Mittelwerte, welcher $a_\mu^{(\nu)}$ definiert, sind ϱ, ϱ' jedoch ebenfalls auf die Intervalle $\mathsf{P}_0 < \varrho < \mathsf{P}$, $\mathsf{P}_0' < \varrho' < \mathsf{P}'$ zu beschränken.

Analog gilt, falls $f(x, y)$ jenen Bedingungen im Gebiete $|x| < \mathsf{P}$, $\mathsf{P}_0' < |y| < \mathsf{P}'$ bezw. $|x| < \mathsf{P}$, $|y| < \mathsf{P}'$ genügt, innerhalb desselben die bezügliche spezielle Entwicklung.

Umgekehrt gilt:

Konvergiert eine Doppelreihe

$$\sum_{\mu,\nu=-\infty}^{+\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$$

im Gebiet $|x| = \varrho$, $|y| = \varrho'$ absolut (oder auch bloß gleichmäßig), und bezeichnet man den durch sie daselbst dargestellten Wert mit $f(x, y)$, so ist stets

$$a_\mu^{(\nu)} = \underset{\varrho,\varrho'}{\mathfrak{M}} \{x^{-\mu} y^{-\nu} f(x, y)\}.$$

Denn wegen der gleichmäßigen Konvergenz in diesem Gebiet ist die gliedweise Bildung des Mittelwertes bei der Reihe $x^{-\mu}y^{-\nu}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\mu^{(\nu)}x^\mu y^\nu$ gestattet und ergibt mittels Gleichung (5.) sofort die Behauptung.

Bezeichnet man mit $\underset{\varrho,\varrho'}{\operatorname{Max}} f(x,y)$ das Maximum von $|f(x,y)|$ im Gebiete $|x| = \varrho$, $|y| = \varrho'$, so ergeben sich noch die Ungleichungen:

$$|a_\mu^{(\nu)}|\varrho^\mu\varrho'^\nu \leqq \underset{\varrho,\varrho'}{\operatorname{Max}} f(x,y).$$
$$(\mu,\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

§ 17.

Wir wollen nun folgende Festsetzung treffen[1]):

Eine eindeutige analytische Funktion $f(x,y)$ der zwei Veränderlichen x, y heiße an einer bestimmten Stelle (x_0, y_0) *regulär*, wenn sie in einer gewissen Umgebung dieser Stelle durch eine absolut[2]) konvergierende Reihe von der Form

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}(x-x_0)^\mu(y-y_0)^\nu = \mathfrak{P}(x-x_0,\ y-y_0)$$

dargestellt werden kann. Dabei können die Größen x_0 und y_0 auch den Wert ∞ annehmen, wenn festgesetzt wird, daß das Zeichen $x-\infty$ gleichbedeutend mit $\frac{1}{x}$ sein soll.

Hingegen heiße jede Begrenzungsstelle des durch die Gesamtheit der regulären Stellen gebildeten Kontinuums eine *singuläre* Stelle für die Funktion $f(x,y)$.

Aus dieser Definition ergibt sich sofort[1]) (vgl. § 6):

Verhält sich eine eindeutige analytische Funktion $f(x,y)$ regulär an einer bestimmten Stelle (x_0, y_0), so gilt dasselbe auch von jeder Stelle, die in einer gewissen Umgebung der ersteren liegt.

Des weiteren läßt sich folgendes dartun:

Verhält sich eine analytische Funktion $f(x,y)$ in jedem Punkte eines Bereiches $\mathfrak{T}$[3]) regulär, so gilt:

1. $f(x,y)$ ist für jeden Wert y von T' eine in bezug auf x in T durchweg reguläre analytische Funktion, — und vice versa.

---

1) K. Weierstraß: Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, Nr. 3. Abh. a. d. Funktionenlehre, p. 128.

2) Der Zusatz „absolut" kann ebensogut fortbleiben. (Vgl. p. 51.)

3) S. p. 3, Fußn.

2. $f(x, y)$ ist in $\mathfrak{T}$ stetig (und somit[1]) in jedem Teilbereich $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{T}$ gleichmäßig stetig).

Umgekehrt: Erfüllt eine Funktion $f(x, y)$ in $\mathfrak{T}$ die Bedingungen 1. und 2., so ist sie eine in jedem Punkte von $\mathfrak{T}$ reguläre analytische Funktion von x, y.

Ist nämlich (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{T}$, so folgt aus der Existenz einer die Funktion in der Umgebung dieses Punktes darstellenden absolut konvergenten Doppelreihe $\mathfrak{P}(x - x_0, y - y_0)$ ohne weiteres, daß sowohl die Funktion $f(x, y_0)$ von x in $x = x_0$, als auch die Funktion $f(x_0, y)$ von y in $y = y_0$ sich regulär verhalten, mithin die Gültigkeit von 1. Da ferner (vgl. § 6) $\mathfrak{P}(x - x_0, y - y_0)$ im Punkte (x_0, y_0) stetig ist, so ist $f(x, y)$ eine in jedem Punkte von $\mathfrak{T}$ stetige Funktion. Umgekehrt: Ist (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{T}$, so existiert[2]) ein ebenfalls noch zu $\mathfrak{T}$ gehöriges Kreisgebiet $|x - x_0| < \mathsf{P}$, $|y - y_0| < \mathsf{P}'$; da in diesem die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind, so folgt nach dem Hauptsatz (§ 16) die Existenz einer in diesem Kreisgebiet absolut konvergenten, daselbst mit $f(x, y)$ übereinstimmenden Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - x_0, y - y_0)$.

Mit Anwendung von § 16 ergibt sich daher nun:

Ist eine analytische Funktion $f(x, y)$ *regulär* im Gebiete

(a) $\mathsf{P}_0 < |x| < \mathsf{P}, \quad \mathsf{P}_0' < |y| < \mathsf{P}'$

bzw. (b) $|x| < \mathsf{P}, \quad \mathsf{P}_0' < |y| < \mathsf{P}'$.

bzw. (c) $|x| < \mathsf{P}, \quad |y| < \mathsf{P}'$

so existiert eine Doppelreihe

$$\sum_{\mu, \nu} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$$

(die Summe erstreckt über alle Wertsysteme

(a) $\mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

bzw. (b) $\mu = 0, 1, 2, \ldots, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

bzw. (c) $\mu, \nu = 0, 1, 2 \ldots$)

welche in diesem Gebiete absolut konvergiert und daselbst mit $f(x, y)$ übereinstimmt.

Es sei nun wieder $\mathsf{P}_0 < \mathsf{P}$, $\mathsf{P}_0' < \mathsf{P}'$, und es stehe von einer analytischen Funktion $f(x, y)$ fest, daß sie sich in jedem Punkte (x, y) des Kreisgebiets $|x| \leqq \mathsf{P}$, $|y| \leqq \mathsf{P}'$, *welcher nicht zugleich dem Kreisgebiet $|x| < \mathsf{P}_0$, $|y| < \mathsf{P}_0'$ angehört,* regulär verhalte. Alsdann sind zunächst für

1) Dies kann z. B. mittels des Hilfssatzes in § 18 nachgewiesen werden.

2) S. p. 3, Fußnote 1).

das Ringgebiet $P_0 \leqq |x| \leqq P$, $P_0' \leqq |y| \leqq P'$ sicher die Bedingungen des vorigen Satzes erfüllt, und es gibt somit für $f(x, y)$ eine und nur eine im Gebiet $P_0 < |x| < P$, $P_0' < |y| < P'$ gültige Darstellung von der Form:

$$f(x, y) = \sum_{\mu, \nu = -\infty}^{+\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu.$$

Nach Voraussetzung sind aber die Bedingungen auch noch im Gebiete $|x| \leqq P$, $P_0' \leqq |y| \leqq P'$ erfüllt, und es gilt daher für die obige Entwicklung notwendig

$$a_\mu^{(\nu)} = 0 \qquad (\mu = -1, -2, \ldots)$$

Genau ebenso läßt sich jedoch zeigen:

$$a_\mu^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = -1, -2, \ldots)$$

so daß die Entwicklung nur die spezielle Form

$$f(x, y) = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$$

besitzen kann; diese Reihe, welche zunächst in den beiden Gebieten $|x| < P$, $P_0' < |y| < P'$ und $P_0 < |x| < P$, $|y| < P'$ mit $f(x, y)$ übereinstimmte, stellt aber eine im vollen Kreisgebiet $|x| < P$, $|y| < P'$ reguläre analytische Funktion dar; *es verhält sich daher notwendig $f(x, y)$ ebenfalls in diesem Kreisgebiet durchweg regulär.*

Als spezieller Fall ergibt sich daraus ohne weiteres, daß *eine eindeutige*[1]) *analytische Funktion $f(x, y)$ keine isolierten singulären Stellen besitzen kann.*

Verhält sich nämlich $f(x, y)$ regulär etwa in dem ganzen Kreisgebiet $|x| \leqq P$, $|y| \leqq P'$ mit etwaiger Ausnahme der Stelle $(0, 0)$, an welcher über ihr Verhalten nichts vorausgesetzt werde, so hat man, wenn man noch P_0 und P_0' den Ungleichungen $0 < P_0 < P$, $0 < P_0' < P'$ gemäß beliebig wählt, wieder den soeben untersuchten Fall. Die für das Ringgebiet $P_0 < |x| < P$, $P_0' < |y| < P'$ gültige Entwicklung hat also die spezielle Gestalt

$$f(x, y) = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu = \mathfrak{P}(x, y)$$

(wo die Doppelreihe für $|x| < P$, $|y| < P'$ absolut konvergiert) und stimmt zunächst mit $f(x, y)$ in jedem Gebiete

$$|x| < P,\ P_0' < |y| < P' \quad \text{und} \quad P_0 < |x| < P,\ |y| < P'$$

überein, wie klein auch P_0 und P_0' gewählt werden, d. h. abgesehen vom

1) Das gleiche gilt selbstverständlich auch für eine mehrdeutige Funktion innerhalb jedes Bereiches, in welchem sie einändrig ist.

Punkt $(0, 0)$ selbst, in jedem Punkt des Kreisgebiets $|x| < \mathsf{P}$, $|y| < \mathsf{P}'$. Es besitzt mithin $f(x, y)$ im Punkt $(0, 0)$ notwendig den Wert $a_0^{(0)}$, und wird im ganzen Kreisgebiet $|x| < \mathsf{P}$, $|y| < \mathsf{P}'$ durch die absolut konvergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ dargestellt.[1])

§ 18.

Ehe wir dazu übergehen, aus den bisherigen Sätzen Schlüsse bezüglich der am Rande des Bereiches der absoluten Konvergenz einer Reihe $\mathfrak{P}(x, y)$ notwendig auftretenden singulären Stellen zu ziehen, beweisen wir folgenden Hilfssatz, von welchem bei allen nachfolgenden Untersuchungen häufig Gebrauch gemacht werden wird.

Hilfssatz. *Ist P irgend eine abgeschlossene Punktmenge in einem endlichen Gebiete der x-Ebene, und ist jedem Punkte x derselben als Mittelpunkt ein Kreis K mit von 0 verschiedenem Radius zugeordnet, so läßt sich aus diesen Kreisen stets eine* endliche *Anzahl $K_1, K_2, \ldots K_l$ derart herausgreifen, daß jeder Punkt von P sich im Innern mindestens eines der Kreise K_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ befindet.*[2])

Beweis. Wird die Punktmenge P in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegt (wobei ein und derselbe Punkt auch mehreren Teilen zugleich angehören darf), und gilt das Behauptete für jeden einzelnen Teil, so gilt es offenbar auch für P selbst.

Gesetzt die Behauptung träfe nun auf die Punktmenge P mit dem zugehörigen Kreissystem nicht zu, so sei zunächst die Ebene durch zwei Systeme äquidistanter Parallelen zu den beiden Achsen in kongruente Quadrate eingeteilt. Die Punktmenge wird so höchstens in eine endliche Zahl von Teilen zerlegt, deren jeder in einem der Quadrate gelegen ist. Dabei seien stets diejenigen Punkte von P, welche auf der Begrenzung zweier Quadrate liegen, beiden Teilmengen, diejenigen, welche auf einer Ecke liegen, den 4 angrenzenden Teilmengen zugerechnet, so daß sämtliche Teilmengen wieder abgeschlossene Mengen werden.

---

1) Die Unmöglichkeit der isolierten singulären Stellen läßt sich auch mittels des Stetigkeitssatzes in § 3 erweisen. Beobachtet man nämlich (unter den Annahmen des Textes) die Abhängigkeit der assoziierten Radien bei der die Funktion in der Umgebung etwa der Stelle $(\frac{1}{2}\mathsf{P}, \frac{1}{2}\mathsf{P}')$ darstellenden Potenzreihe, so ergibt sich sofort ein Widerspruch mit dem genannten Satze.

2) Offenbar kann der Satz auch in folgender Form ausgesprochen werden: Ist eine abgeschlossene Punktmenge P vorgelegt, und ferner ein System von Kreisen, derart, daß jeder Punkt von P im Innern mindestens eines der Kreise gelegen ist, so läßt sich aus diesen Kreisen stets eine endliche Anzahl herausgreifen, welche ein System von der nämlichen Eigenschaft bilden.

Der entsprechende Satz für *lineare* Punktmengen findet sich in einer etwas engeren Fassung (nämlich für den Fall, wo die Punktmenge aus den sämtlichen Punkten eines Intervalls besteht) ausgesprochen bei E. Borel, Ann. Ecole Norm. (3) 12 (1895), p. 51. Über die Ausdehnung dieses Borelschen Satzes auf zweidimensionale Bereiche vgl. A. Schoenflies, Jahresber. D. M. V. 8 (1899), p. 52.

Da nun die Behauptung für P nicht gelten soll, so muß sie auch für mindestens eine P_1 der Teilmengen nicht gelten. Diese letztere werde nun durch Zerlegung des betreffenden Quadrats Q_1 in 4 kongruente Quadrate wiederum in (höchstens) 4 Teilmengen gespalten. Diejenige P_2 dieser Teilmengen, für welche die Behauptung nicht gilt, werde wiederum zerlegt, u. s. f.

Man erhält auf diese Weise eine unendliche Anzahl von Quadraten $Q_\nu \cdot (\nu = 1, 2, \ldots)$, deren jedes das folgende enthält, und in deren jedem eine Teilmenge P_ν gelegen ist, für welche die Behauptung nicht zutrifft. Greift man von jeder Teilmenge P_ν einen beliebigen Punkt x_ν heraus, so erhält man eine unendliche Reihe von Punkten, deren Häufungsstelle x_0 *allen* Punktmengen P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ angehört, und mithin auch in jedem der Quadrate Q_ν liegt. Da nämlich $x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots$ sämtlich Punkte von P_ν sind, so muß das gleiche auch von ihrer Häufungsstelle x_0 gelten. Der zu x_0 gehörige Kreis muß infolgedessen, da er einen endlichen Radius besitzt, jedes der Quadrate Q_ν von einem gewissen $\nu = n$ ab, und mit ihm die Punktmenge P_ν $(\nu = n, n+1, \ldots)$ ganz einschließen, was der Annahme widerspricht, daß für diese die Behauptung nicht gelten sollte.

Faßt man, wie üblich, die x-Ebene als eine im Punkte $x = \infty$ geschlossene Fläche auf, so ist die Beschränkung der Punktmenge P auf Gebiete von endlicher Ausdehnung nicht mehr notwendig.

Denn alsdann erscheint, falls die Menge sich ins Unendliche erstrecken sollte, der Punkt $x = \infty$ als Häufungsstelle, so daß er nach Voraussetzung selbst der Menge angehören muß. Dem Punkt $x = \infty$ ist daher ebenfalls ein Kreis zugeordnet, welcher als K_1 gewählt werden mag; derjenige Teil der Menge, welcher nicht innerhalb dieses Kreises liegt, erfüllt aber die ursprüngliche Voraussetzung.

Folgerung. Verhält sich eine eindeutige analytische Funktion $f(x, y)$ von x und y an sämtlichen Stellen $(x, 0)$ regulär, für welche x einer abgeschlossenen Punktmenge P angehört, so gibt es ein Gebiet, bestehend in der x-Ebene aus einer endlichen Anzahl von Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_l$, in der y-Ebene aus einem Kreise $|y| < \varrho'$, derart, daß erstens $f(x, y)$ sich an jeder Stelle dieses Gebietes regulär verhält, und daß zweitens jeder Punkt x von P innerhalb mindestens eines der Kreise K_λ $(\lambda = 1, 2, .., l)$ gelegen ist.

Denn ist x_1 ein Punkt von P, also $(x_1, 0)$ reguläre Stelle, so gibt es nach § 17 ein ebenfalls nur aus regulären Stellen bestehendes Kreisgebiet $|x - x_1| < \varrho_1$, $|y| < \varrho_1'$. Jedem Punkte x_1 von P ist auf diese Weise ein Kreis $|x - x_1| = \varrho_1$ zugeordnet. Von diesen Kreisen lassen sich nun eine endliche Anzahl $K_1, K_2, \ldots, K_l$ (mit den Mittelpunkten $x_1, x_2, \ldots, x_l$) derart herausgreifen, daß jeder Punkt von P sich innerhalb eines derselben befindet. Von den dazugehörigen Größen $\varrho_1', \varrho_2', \ldots, \varrho_l'$ sei die kleinste mit ϱ' bezeichnet. Alsdann besteht jedes Gebiet $|x - x_\lambda| < \varrho_\lambda$,

$|y| < \varrho'$ $(\lambda = 1, 2, \ldots l)$ nur aus regulären Stellen, womit die Behauptung erwiesen ist.

§ 19.

Es sei nun $\mathfrak{P}(x, y)$ eine beliebige Potenzreihe, von welcher feststehe, daß sie im Kreisgebiet $|x| < r$, $|y| < r'$ absolut konvergiere. Es können alsdann zunächst zwei Hauptfälle unterschieden werden.

Entweder gibt es eine positive Größe δ derart, daß $\mathfrak{P}(x, y)$ auch noch im Gebiete $|x| < r + \delta$, $|y| < r' + \delta$ absolut konvergiert; in diesem Falle ist offenbar nicht nur jeder Punkt des ursprünglichen Gebietes, sondern auch jeder Punkt seiner Begrenzung für die durch $\mathfrak{P}(x, y)$ dargestellte Funktion eine *reguläre* Stelle.

Oder aber es gibt keine positive Größe, welche diese Eigenschaft besitzt, d. h. wie klein $\delta > 0$ auch gewählt wird, so konvergiert $\mathfrak{P}(x, y)$ nicht mehr in jedem Punkt des Gebietes $|x| < r + \delta$, $|y| < r' + \delta$ absolut. Alsdann konvergiert aber $\mathfrak{P}(x, y)$ in *keinem* Punkte (x, y) absolut, für welchen $|x| > r$, $|y| > r'$ ist; denn gäbe es eine derartige Stelle (x_0, y_0), und wäre $|x_0| = r + \delta$, $|y_0| = r' + \delta'$, so müßte entgegen der Annahme auch in dem ganzen Gebiet $|x| < |x_0| = r + \delta$, $|y| < |y_0| = r' + \delta'$ absolute Konvergenz herrschen. Gemäß der früheren Definition sind also r, r' in diesem Falle als ein Paar *assoziierter Radien* zu bezeichnen. (Offenbar gilt auch umgekehrt: Sind r, r' ein Paar assoziierter Radien, so konvergiert $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiet $|x| < r$, $|y| < r'$ absolut, nicht aber durchweg im Gebiet $|x| < r + \delta$, $|y| < r' + \delta$.)

Im folgenden haben wir uns ausschließlich mit dem letzteren Falle zu beschäftigen. Zunächst läßt sich ganz allgemein zeigen:

Sind r und r' ein Paar assoziierter Radien für die Reihe $\mathfrak{P}(x, y)$, so besitzt die durch $\mathfrak{P}(x, y)$ definierte analytische Funktion stets eine singuläre Stelle (x_0, y_0), für welche $|x_0| \leqq r$, $|y_0| \leqq r'$ ist (wobei die Kombination $|x_0| < r$, $|y_0| < r'$ selbstverständlich ausgeschlossen bleibt).

Beweis: Es sei $\delta > 0$ beliebig gewählt. Wäre alsdann jede Stelle des Gebietes $|x| < r + \delta$, $|y| < r' + \delta$ eine reguläre Stelle, so müßte nach § 17 $\mathfrak{P}(x, y)$ in diesem Gebiete durchweg absolut konvergieren. Die durch $\mathfrak{P}(x, y)$ dargestellte analytische Funktion besitzt daher notwendig mindestens eine singuläre Stelle (x_1, y_1), für welche $|x_1| < r + \delta$, $|y_1| < r' + \delta$ ist.

Es seien nun der Größe δ eine Reihe von positiven Werten $\delta_1, \delta_2, \ldots$ beigelegt, welche gegen 0 konvergieren, und es sei (x_ν, y_ν) eine singuläre Stelle, für welche $|x_\nu| < r + \delta_\nu$, $|y_\nu| < r' + \delta_\nu$. Befindet sich alsdann unter den Punkten (x_ν, y_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ein solcher, für welchen $|x_\nu| \leqq r$, $|y_\nu| \leqq r'$, so ist damit die Behauptung erwiesen. Ist dies jedoch nicht der Fall, so ist die Anzahl der voneinander verschiedenen unter den Punkten (x_ν, y_ν) notwendig eine unendliche, und dieselben besitzen daher mindestens eine Häufungsstelle (x_0, y_0). Für diese letztere muß offenbar

$|x_0| \leqq r$, $|y_0| \leqq r'$ sein. Wäre (x_0, y_0) aber eine reguläre Stelle, so müßte das gleiche auch von allen Stellen einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0) gelten. Da dies nicht der Fall ist, so ist (x_0, y_0) notwendig eine singuläre Stelle, so daß auch in diesem Falle die Behauptung erwiesen ist.[1])

Um die verschiedenen Möglichkeiten, welche hierbei eintreten können, näher zu untersuchen, werden wir im folgenden auch die Resultate des ersten Abschnittes mit anwenden und insbesondere zu unterscheiden haben, ob eine der beiden Größen r, r' ein Maximalradius (§ 4) ist oder nicht. Zunächst zeigen wir:

Konvergiert $\mathfrak{P}(x, y)$ *im Gebiete* $|x| < r$, $|y| < r'$, *und besitzt die Funktion eine singuläre Stelle* (x_0, y_0), *für welche* $|x_0| = r$, $|y_0| < r'$, *so sind auch die sämtlichen Stellen* (x_0, y) $(|y| \leqq r')$ *singuläre Stellen.*

Beweis: Wir weisen dies zunächst nur für diejenigen Werte $y = y_1$ des Gebietes $|y| \leqq r'$ nach, für welche $|y_1 - y_0| < r' - |y_1|$.[2])

Es gelte für einen derartigen Punkt y_1 etwa

$$r' - |y_1| = |y_1 - y_0| + s \qquad (s > 0).$$

Ist nun entgegen der Behauptung (x_0, y_1) eine reguläre Stelle, so gibt es ein Kreisgebiet

$$|x - x_0| < \sigma, \quad |y - y_1| < \sigma'$$

welches ebenfalls nur aus regulären Stellen besteht; dabei sei $\sigma < r$ gewählt. Setzt man

$$x_1 = \left(1 - \frac{\sigma}{4r}\right)x_0,$$

so gibt es, da $|x_1| < r$, $|y_1| < r'$, eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_1(x - x_1, \, y - y_1),$$

welche die Funktion in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1) darstellt. Der bei dieser Potenzreihe zu einem Radius ϱ der x-Ebene assoziierte Radius der y-Ebene sei mit $\varrho' = \varphi(\varrho)$ bezeichnet. Da alle Punkte des Gebietes

$$|x - x_1| < \frac{\sigma}{4}, \quad |y - y_1| < r' - |y_1|$$

dem ursprünglichen Kreisgebiet angehören, also reguläre Stellen sind, so

1) Der Beweis läßt sich auch auf anderem Wege, und zwar mittels der Folgerung aus dem Hilfssatz (§ 18) erbringen: Die Annahme, daß jede Stelle (x_0, y_0) des Gebietes $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$ eine reguläre sei, d. h. daß ihr ein Kreisgebiet $|x - x_0| \leqq \varrho_0$, $|y - y_0| \leqq \varrho_0'$ zugeordnet sei, in welchem die Funktion sich regulär verhält, führt notwendig zu einem Gebiete $|x| \leqq r + \delta$, $|y| \leqq r' + \delta$ $(\delta > 0)$, in welchem die Funktion ebenfalls noch regulär sein und $\mathfrak{P}(x, y)$ daher absolut konvergieren müßte.

2) D. h. deren Abstand von y_0 kleiner ist als derjenige von der Kreisperipherie. (Die Punkte bilden das Innere der Ellipse, welche die große Halbachse $\frac{r'}{2}$, und die Punkte $y = 0$ und $y = y_0$ zu Brennpunkten besitzt.)

ist sicher

$$\varphi\left(\frac{\sigma}{4}-0\right) \geqq r' - |y_1| = |y_1 - y_0| + s.$$

Da andererseits (x_0, y_0) singuläre Stelle ist, so muß notwendig:

$$\varphi\left(\frac{\sigma}{4}+0\right) \leqq |y_1 - y_0|.$$

Demnach ist $\varphi(\varrho)$ für $\varrho = \frac{\sigma}{4}$ unstetig, was nur möglich, wenn $\frac{\sigma}{4}$ der Maximalradius ist, d. h. wenn

(a) $$\varphi(\varrho) = 0 \quad \text{für} \quad \varrho > \frac{\sigma}{4}.$$

Nun besteht aber nach Annahme das Gebiet $|x - x_0| < \sigma$, $|y - y_1| < \sigma'$ nur aus regulären Stellen, mithin auch das in ihm enthaltene Gebiet

$$|x - x_1| < \frac{3\sigma}{4}, \quad |y - y_1| < \sigma'.$$

Nach dem Hauptsatz muß also $\mathfrak{P}_1(x - x_1, y - y_1)$ in diesem letzteren Gebiet absolut konvergieren, also z. B. sicher für $|x - x_1| = \frac{\sigma}{2}$, $|y - y_1| = \frac{\sigma'}{2}$, d. h. es muß

(b) $$\varphi\left(\frac{\sigma}{2}\right) \geqq \frac{\sigma'}{2}$$

in Widerspruch mit (a).

Nachdem festgestellt ist, daß jede Stelle (x_0, y_1) eine singuläre Stelle ist, kann man nun, von einer solchen aus weiter schließend, das gleiche für jeden Punkt (x_0, y_2) nachweisen, für welchen

$$|y_2 - y_1| < r' - |y_2|$$

u. s. f. Indem man dies Verfahren eine endliche Anzahl von Malen anwendet, ist es aber stets möglich, zu irgend einem vorgeschriebenen Punkt y des Gebietes $|y| < r'$ zu gelangen. Dies läßt sich z. B. wie folgt einsehen: Zu den Punkten $y = y_1$ gehört stets der Mittelpunkt $y = 0$ des Kreises. Von diesem aus weiterschließend gelangt man auf dem folgenden Schritte zu allen Punkten y_2, für welche $|y_2| < \frac{r'}{2}$; auf dem nächstfolgenden durch passende Wahl von y_2 zu irgend einem Punkte y_3, für welchen $|y_3| < \frac{3}{4}r'$, u. s. f. Mithin ist notwendig jede Stelle (x_0, y) $(|y| < r')$ und somit auch jede Stelle (x_0, y) $(|y| \leqq r')$ eine singuläre.

Ferner gilt: *Ist $\mathfrak{P}(x, y)$ eine beliebige in der Umgebung des Punktes $(0, 0)$ konvergente Potenzreihe, R ihr Maximalradius in der x-Ebene, so gibt es stets eine singuläre Stelle (x, y), für welche $|x| = R$ und $y = 0$ ist.*

Denn wären sämtliche Stellen $(x, 0)$ regulär, für welche $|x| \leqq R$ ist, so gäbe es (§ 18) ein Gebiet, bestehend in der x-Ebene aus einer endlichen Anzahl von Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_l$, in der y-Ebene aus einem Kreise $|y| < \varrho'$, derart, daß erstens $f(x, y)$ sich an jeder Stelle dieses

Gebietes regulär verhielte, und daß zweitens jeder Punkt x, für welchen $|x| \leqq R$, im Innern eines der Kreise K_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ gelegen wäre. Es würde aber alsdann eine gewisse Kreisfläche $|x| \leqq R + \delta$ $(\delta > 0)$ existieren, welche von dem Kreissystem K_λ noch vollständig überdeckt wäre; im Gebiete $|x| \leqq R + \delta$, $|y| < \varrho'$ müßte sich $f(x, y)$ noch regulär verhalten, und folglich die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ dort absolut konvergieren, während R ihr Maximalradius sein sollte. Mithin existiert notwendig eine singuläre Stelle $(x, 0)$, für welche $|x| \leqq R$ ist; dabei kann aber die Möglichkeit $|x| < R$ nicht in Frage kommen.

Wir knüpfen nun wieder an den obigen allgemeinen Fall an und verstehen unter r und r' irgend ein Paar assoziierter Radien der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$. Es gelten alsdann in den beiden zu unterscheidenden Fällen folgende Aussagen:

1. Ist r Maximalradius, $(r = R,)$ (und *nur* wenn dies der Fall ist,) so gibt es mindestens einen Wert $x = x_0$ $(|x_0| = r)$ derart, daß die *sämtlichen* Stellen (x_0, y) $(|y| \leqq r')$ singuläre Stellen sind.

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus den beiden vorhergehenden Sätzen.

Da, wenn r Maximalradius ist, der größte Wert, welcher r' beigelegt werden kann, der Minimalradius R_0' ist (vgl. § 4), so kann der Satz auch in der folgenden Fassung ausgesprochen werden:

Ist für eine in der Umgebung des Punktes $(0, 0)$ absolut konvergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ der Minimalradius R_0' von null verschieden, so gibt es mindestens einen Wert $x = x_0$, dessen absoluter Betrag gleich dem Maximalradius R ist, derart, daß die *sämtlichen* Stellen (x_0, y) $(|y| \leqq R_0')$ singuläre Stellen sind.[1] (Ist jedoch $R_0' = 0$, so gilt nur noch die Aussage des vorhergehenden Satzes, nach welcher eine singuläre Stelle $(x_0, 0)$ vorhanden sein muß, für welche $|x_0| = R$ ist.[2])

Ist r' Maximalradius, $(r' = R',)$ so gilt selbstverständlich die analoge Aussage. Sind sowohl r als auch r' Maximalradien (d. h. besteht der Bereich der absoluten Konvergenz überhaupt nur aus dem Kreisgebiet $|x| < r$, $|y| < r'$), so treten beide Aussagen gleichzeitig in Kraft.[3])

---

1) Beispiel. $\mathfrak{P}(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu} x^\mu y^\nu = \frac{1}{(1-x)(1-xy)}$. Hier ist $r' = \varphi(r) = \frac{1}{r}$, $(0 < r < 1)$, $R = 1$, $R_0' = 1$; dementsprechend die singuläre Stelle $(1, y)$ für jeden Wert von y.

2) Vgl. das Beispiel in § 18: $\mathfrak{P}(x, y) = f(x + y)$, wo $f(x)$ die singuläre Stelle $x = 1$ besitzt. Hier ist $R = 1$, $R_0' = 0$; in der Tat ist $(1, 0)$ singuläre Stelle.

3) Beispiel. $\mathfrak{P}(x, y) = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} x^\mu y^\nu = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$. Hier ist $R_0 = R = 1$, $R_0' = R' = 1$; in der Tat ist $(1, y)$ singuläre Stelle bei jedem Wert von y, und $(x, 1)$ bei jedem Wert von x.

2. Ist weder r noch r' Maximalradius, so gibt es auf der Begrenzung des Gebietes $|x| < r$, $|y| < r'$ stets singuläre Stellen (x_0, y_0), für welche $|x_0| = r$, $|y_0| = r'$ ist (und *nur* solche). Jede derselben hat überdies die Eigenschaft, Häufungsstelle weiterer singulärer Stellen (x, y) zu sein, für welche $|x| < r$, $|y| > r'$, wie auch solcher, für welche $|x| > r$, $|y| < r'$ ist.[1])

Beweis. Zunächst steht fest, daß keine singuläre Stelle (x_0, y_0) auftreten kann, für welche $|x_0| = r$, $|y_0| < r'$ ist (oder vice versa); denn alsdann wären nach dem oben bewiesenen Satze die sämtlichen Stellen (x_0, y) $(|y| \leqq r')$ singuläre Stellen, und somit r Maximalradius. Da aber nach dem ersten Satze dieses Paragraphen mindestens eine singuläre Stelle (x_0, y_0), $(|x_0| \leqq r,\ |y_0| \leqq r')$ vorhanden sein muß, so ist hiermit der erste Teil der Behauptung erwiesen.

Ist nun $0 < r_1 < r$, so gilt, da weder r noch r' Maximalradius ist, $r_1' > r'$, wenn mit r_1' der zu r_1 assoziierte Radius bezeichnet wird, und es existiert mindestens eine singuläre Stelle (x_1, y_1), für welche $|x_1| = r_1$, $|y_1| = r_1'$ ist. Nähert sich r_1 dem Wert r, so nähert sich r_1' dem Wert r'; die Gesamtheit der singulären Stellen (x_1, y_1) besitzt also sicher eine Häufungsstelle (x_0, y_0), für welche $|x_0| = r$, $|y_0| = r'$ gilt, und welche natürlich ebenfalls singuläre Stelle ist.

Ist nun (x_0, y_0) *irgend* eine singuläre Stelle, für welche $|x_0| = r$, $|y_0| = r'$ ist, so bleibt noch zu zeigen, daß sie selbst Häufungsstelle von singulären Stellen (x_1, y_1) der soeben betrachteten Art ist. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Doppelreihe $\mathfrak{P}_0\left(x - \frac{x_0}{2},\ y - \frac{y_0}{2}\right)$, welche die Funktion in der Umgebung der Stelle $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ darstellt. Für diese sind offenbar $\frac{r}{2}$, $\frac{r'}{2}$ ein Paar assoziierter Radien; die einzige singuläre Stelle auf der Begrenzung des Gebietes $\left|x - \frac{x_0}{2}\right| < \frac{r}{2}$, $\left|y - \frac{y_0}{2}\right| < \frac{r'}{2}$ ist aber die Stelle (x_0, y_0), und mithin ist wiederum weder $\frac{r}{2}$ noch $\frac{r'}{2}$ Maximalradius. Nach dem soeben Bewiesenen muß daher (x_0, y_0) als einzige singuläre Stelle der Begrenzung zugleich Häufungsstelle von singulären Stellen (x_1, y_1) sein, für welche $\left|x_1 - \frac{x_0}{2}\right| < \frac{r}{2}$ und somit $|x_1| < r$ (also notwendig $|y_1| > r'$) gilt.

---

1) Vgl. wiederum das Beispiel in § 13. Es galt hier $r' = 1 - r$ $(0 < r < 1)$. Jede Stelle (x, y), für welche $x + y = 1$, ist singuläre Stelle. Am Rande eines Gebietes $|x| < r$, $|y| < r'$ befindet sich jedesmal *eine* solche, nämlich die Stelle (r, r'), und diese ist zugleich Häufungsstelle der singulären Stellen $(r - \varepsilon,\ r' + \varepsilon)$, wo ε jeden komplexen Wert annehmen kann.

VI. Erweiterungen des Satzes von der Unmöglichkeit isolierter singulärer Stellen.

§ 20.

Es seien hier einige Betrachtungen über singuläre Stellen angefügt, welche den Zweck verfolgen, den in § 17 bewiesenen Satz über die *Unmöglichkeit isolierter singulärer Stellen* nach verschiedenen Richtungen hin zu ergänzen.[1]) An die Spitze sei ein Satz gestellt, dessen Beweis sich lediglich auf folgende Punkte stützen wird:

a) Sind die Funktionen $F_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eindeutig und regulär für jede Stelle x eines gewissen Bereiches B[2]), und konvergiert $\sum\limits_\nu{}' F_\nu(x)$ gleichmäßig in bezug auf alle Werte x der Randkurve C von B, so konvergiert die Summe auch gleichmäßig in bezug auf sämtliche Werte x des Bereiches B. (Siehe § 11.)

b) Konvergiert die *Doppelreihe* $\mathfrak{P}(x, y)$ für alle Wertsysteme (x, y), welche den Bedingungen $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ genügen, *absolut*, so konvergiert ihre *Zeilenreihe* $P(x,y) = \sum\limits_\nu{}' P_\nu(x) y^\nu$, wenn x und y in der gleichen Weise beschränkt werden, *gleichmäßig* in bezug auf die Umgebung jeder Stelle x, *und umgekehrt*. (Siehe § 12.)

c) Enthält der Bereich B der x-Ebene den Punkt $x = 0$, und ist $f(x, y)$ eine für jeden Wert $x = x_0$ des Bereiches B bei hinlänglich kleinem $|y|$ eindeutig definierte Funktion von (x, y), welche sich an jeder Stelle $(x_0, 0)$ regulär verhält, so definiert jede Zeile $P_\nu(x)$ der die Funktion in der Nähe des Nullpunkts darstellenden Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ eine für alle x des Bereiches B eindeutige und reguläre Funktion $f_\nu(x)$ von x,

---

1) Ebenso wie die Unmöglichkeit isolierter singulärer Stellen, so lassen sich auch die hier folgenden Sätze aus der Cauchyschen Integralformel ableiten.

2) S. p. 3, Fußn.

und es gibt eine positive Zahl ϱ' derart, daß für $|y| < \varrho'$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu,$$

solange x dem Bereiche B angehört.

Ist nämlich $x = x_0$ irgend ein Punkt von B, so läßt sich, da die Stelle $(x_0, 0)$ für die Funktion $f(x, y)$ nach Voraussetzung eine reguläre ist, $f(x_0, y)$ nach Potenzen von y entwickeln; die für jeden Punkt $x = x_0$ des Bereiches B eindeutig definierten Koeffizienten dieser Entwicklung seien mit $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ bezeichnet. Andererseits gibt es, wenn $x = x_0$ wiederum einen beliebigen Punkt von B bezeichnet, aus dem nämlichen Grunde eine Doppelreihe $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$, welche in einem gewissen Kreisgebiet $|x - x_0| < \varrho_0$, $|y| < \varrho_0'$ um den Punkt $(x_0, 0)$ sowohl absolut konvergiert als auch dem Werte nach mit $f(x, y)$ übereinstimmt (letzteres wenigstens, solange x dem Bereich B noch angehört). Ordnet man $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$ nach Potenzen von y, so sind die Koeffizienten $\overline{P}_\nu(x - x_0)$ Funktionen von x, welche im Gebiet $|x - x_0| < \varrho_0$ regulär sind und überdies für jeden diesem Kreise angehörenden Wert x des Bereiches B mit $f_\nu(x)$ der Reihe nach übereinstimmen müssen. Die Funktionen $f_\nu(x)$ sind also im Bereiche B eindeutig, verhalten sich in der Umgebung jedes Punktes x_0 von B regulär und stimmen speziell in der Umgebung von $x = 0$ mit $P_\nu(x)$ überein.

Wählt man endlich dem Hilfssatze in § 18 gemäß unter den Punkten von B eine endliche Anzahl $x_0, x_1, \ldots, x_l$ derart aus, daß die im obigen Sinne zugehörigen Kreise $|x - x_\lambda| < \varrho_\lambda$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, l)$ den Bereich B vollständig überdecken, und bezeichnet mit ϱ' den kleinsten der zugeordneten Werte $\varrho_0', \varrho_1', \ldots, \varrho_l'$, so gilt sicher für $|y| < \varrho'$ die behauptete Darstellung von $f(x, y)$ im Bereiche B.

Der zu beweisende Satz lautet nun:

Es sei C die Randkurve eines beliebigen Bereiches B der x-Ebene, ferner r' eine positive Größe. Ist alsdann eine eindeutige[1]) *analytische Funktion $f(x, y)$ regulär sowohl an jeder Stelle (x, y), für welche gleichzeitig x auf C liegt und $|y| \leqq r'$ ist, wie auch an jeder Stelle $(x, 0)$, für welche x dem Bereich B angehört, so verhält sich $f(x, y)$ auch in dem ganzen Gebiete regulär, welches aus dem Bereiche B der x-Ebene und dem Kreise $|y| < r'$ der y-Ebene besteht.*

Beweis. Da $f(x, y)$ sich an jeder Stelle $(x, 0)$ regulär verhält, für

1) Die Beschränkung auf eindeutige Funktionen ist keine wesentliche. Für mehrdeutige Funktionen ist der Satz in folgender Weise auszusprechen: „Verhält sich ein *Zweig* von $f(x, y)$ eindeutig und regulär in den angegebenen Teilgebieten, so verhält sich *derselbe* auch in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär.“ Selbstredend ist dabei unter „demselben“ Zweige die Gesamtheit derjenigen Funktionswerte verstanden, zu denen man gelangt, ohne daß x den Bereich B und y den Kreis $|y| < r'$ verläßt.

welche x in B liegt, so folgt aus c) die Existenz einer positiven Zahl ϱ', derart daß

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu \qquad (x \text{ in } B,\ |y| < \varrho'),$$

wo $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine für alle x des Bereiches B eindeutige und reguläre Funktion bedeutet.

Da andererseits $f(x, y)$ an jeder Stelle (x, y) regulär ist, für welche x auf C liegt und $|y| \leqq r'$ ist, so kann (gemäß der Folgerung aus dem Hilfssatz, § 18) jedem Punkt $x = x_1$ von C ein Kreis $|x - x_1| < \sigma_1$ zugeordnet werden, derart daß $f(x, y)$ sich auch noch im Gebiet $|x - x_1| < \sigma_1$, $|y| \leqq r'$ durchweg regulär verhält. Nach § 17 gibt es also eine in diesem Gebiet absolut konvergente und daselbst mit $f(x, y)$ dem Werte nach übereinstimmende Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_1, y)$, deren *Zeilenreihe* $\sum_\nu \overline{P}_\nu(x - x_1) y^\nu$, wie gleichzeitig angemerkt werde, gemäß b) für $|y| < r'$ im Kreise $|x - x_1| \leqq \frac{1}{2}\sigma_1$ sicher *gleichmäßig* konvergiert. Für diejenigen Werte von x, welche zugleich dem Bereich B angehören, muß jedoch diese Entwicklung von $f(x, y)$ nach Potenzen von y mit der obigen übereinstimmen, so daß $\overline{P}_\nu(x - x_1)$ nichts anderes als die Entwicklung der Funktion $f_\nu(x)$ nach Potenzen von $x - x_1$ sein kann. Der Ausdruck

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu$$

verhält sich also in der Umgebung jedes Punktes (x, y) regulär, für welchen x auf C liegt und $|y| < r'$ ist, und zwar stimmt er auch hier mit $f(x, y)$ überein.

Unter den Punkten von C lassen sich nun — wiederum nach dem Hilfssatz § 18 — eine endliche Anzahl $x_1, x_2, \ldots, x_l$ herausgreifen, derart daß jeder Punkt von C im Innern mindestens eines der zugehörigen Kreise $|x - x_\lambda| \leqq \frac{1}{2}\sigma_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ gelegen ist. Aus der obigen Bemerkung über die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_\nu \overline{P}_\nu(x - x_1) y^\nu$ folgt daher sofort die gleichmäßige Konvergenz der Summe S in bezug auf alle Werte x der Randkurve C, und somit nach a) auch diejenige in bezug auf den Bereich B selbst; $|y| < r'$ überall vorausgesetzt. Ist also $x = x_0$ ein beliebiger *innerer* Punkt von B und gehört der Kreis $|x - x_0| < \varrho_0$ dem Bereich B noch an, so muß die Doppelreihe, welche aus S hervorgeht, wenn die Funktionen $f_\nu(x)$ nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt werden, gemäß b) im Gebiet $|x - x_0| < \varrho_0$, $|y| < r'$ absolut konvergieren, d. h. S stellt eine in diesem Kreisgebiet reguläre analytische Funktion dar.

Faßt man alles zusammen, so verhält sich also der Ausdruck S schließlich in der Umgebung *eines jeden* Punktes des Gebietes $(B, |y| < r')$ regulär; da nun S in gewissen Teilgebieten, z. B. im Gebiete $(B, |y| < \varrho')$

mit $f(x, y)$ übereinstimmte, so fällt notwendig S in dem ganzen bezeichneten Gebiete mit der Funktion $f(x, y)$ zusammen, und diese verhält sich somit ebenfalls an jeder Stelle des Gebietes regulär.

Der Satz behält seine Gültigkeit bei, wenn der Punkt $x = \infty$ dem Bereiche B angehört.

§ 21.

Aus diesem Satze läßt sich nun folgende Schlußfolgerung über die singulären Stellen einer Funktion zweier Veränderlichen ziehen:

Es sei C die Randkurve irgend eines Bereiches B der x-Ebene, welcher den Nullpunkt enthält. Ist nun der Punkt $(0, 0)$ *eine singuläre Stelle der eindeutigen analytischen Funktion $f(x, y)$, verhält sich jedoch $f(x, y)$ an jeder Stelle* $(x, 0)$ *regulär, für welche x auf C liegt, so gibt es eine Zahl $\varrho' > 0$ derart, daß zu jedem Punkt $y = y_0$ des Kreises $|y| < \varrho'$ eine singuläre Stelle (x_0, y_0) existiert, für welche x_0 dem Bereich B angehört.*

Beweis. Da $f(x, y)$ sich an jeder Stelle $(x, 0)$ regulär verhält, für welche x auf C liegt, so gibt es (§ 18) eine Zahl $\sigma' > 0$ derart, daß auch alle Stellen (x, y) reguläre sind, für welche x auf C liegt und $|y| < \sigma'$ ist. Alsdann genügt die Zahl $\varrho' = \frac{1}{3}\sigma'$ den Anforderungen des Satzes. Würde nämlich die Behauptung etwa für den Punkt $y = y_0$ $\left(|y_0| < \frac{\sigma'}{3}\right)$ nicht zutreffen, so müßte $f(x, y)$ sich nicht nur an allen Stellen (x, y_0) regulär verhalten, für welche x auf C liegt, sondern auch noch an allen Stellen (x, y_0), für welche x dem Bereich B angehört. Beschreibt man alsdann um $y = y_0$ als Mittelpunkt einen Kreis (Radius r'), welcher den Nullpunkt umschließt, jedoch noch ganz innerhalb des Gebietes $|y| < \sigma'$ gelegen ist, so würden für diesen Kreis in Verbindung mit dem Bereich B der x-Ebene die Voraussetzungen des vorigen Satzes genau zutreffen. Mithin müßte $f(x, y)$ auch in dem ganzen Gebiet $(B, |y - y_0| < r')$ regulär sein, was der Voraussetzung widerspricht, nach welcher $(0, 0)$ eine singuläre Stelle ist.

Folgerungen. Ist der Punkt $(0, 0)$ eine singuläre Stelle für die Funktion $f(x, y)$, gibt es jedoch in einer gewissen Nachbarschaft desselben keine weitere singuläre Stelle, deren y-Koordinate null ist, oder gibt es wenigstens innerhalb jedes beliebig kleinen Kreises um $x = 0$ noch Bereiche B, welche den Punkt $x = 0$ enthalten, und deren Randpunkte mit $y = 0$ sämtlich reguläre Stellen ergeben, so läßt sich, wie der obige Satz unmittelbar ergibt, *zu einer gegebenen positiven Zahl ϱ stets eine zweite ϱ' derart angeben, daß zu jedem Punkt $y = y_0$ des Kreises $|y| < \varrho'$ mindestens eine singuläre Stelle (x_0, y_0) der Funktion existiert, welche der Bedingung $|x_0| < \varrho$ genügt.*[1])

1) Ist $(0, 0)$ singuläre Stelle, gibt es jedoch keine singulären Stellen (x, y), für welche $0 < |x| < g$, $|y| < g'$ ist, wo g und g' zwei positive Zahlen bedeuten, so

Ist der Punkt $(0, 0)$ eine singuläre Stelle, ist jedoch die soeben angegebene weitere Voraussetzung nicht erfüllt, d. h. besitzt *ein jeder* innerhalb eines gewissen Kreises $|x| < \varrho$ gelegener, den Nullpunkt enthaltender Bereich B mindestens einen Randpunkt x, welcher Koordinate einer singulären Stelle $(x, 0)$ ist, so kann man noch folgende zwei Möglichkeiten unterscheiden: Entweder erfüllt die Gesamtheit der Stellen $(x, 0)$, an welchen die Funktion sich nicht regulär verhält, (welche also entweder singuläre Stellen sind oder ganz außerhalb des Definitionsbereiches der Funktion liegen,) die ganze x-Ebene überall dicht, oder dies ist nicht der Fall.[1]) Im ersten Fall kann sich offenbar die Funktion in *keinem* Punkte regulär verhalten, dessen y-Koordinate null ist, $y = 0$ kann etwa als „feste" singuläre Stelle bezeichnet werden, und der obige Satz gestattet keine Anwendung mehr; in der Tat braucht es in diesem Falle weitere singuläre Stellen nicht mehr zu geben.

Im zweiten Falle aber lassen sich in der x-Ebene Bereiche B_1, $B_2, \ldots$ nachweisen, deren Punkte x ausnahmslos *reguläre* Stellen $(x, 0)$ liefern (und welche demnach den Punkt $x = 0$ nicht enthalten). Man bezeichne, nachdem eine beliebig große, jedoch endliche Anzahl solcher Bereiche ausgeschieden worden ist, den Rest der x-Ebene mit $\overline{T}$, und sodann mit B die Gesamtheit der Häufungsstellen aller derjenigen Punkte von $\overline{T}$, welche mit dem Punkt $x = 0$ durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke bestehende Linie verbunden werden können, die ganz in $\overline{T}$ verläuft. Jeder solche Bereich B genügt alsdann den Voraussetzungen des obigen Satzes.

§ 22.

Wir wollen den in § 20 bewiesenen Satz nun noch dazu benutzen, um einen in § 17 nur für den Fall konzentrischer Kreisgebiete abgeleiteten Satz auf beliebige Bereiche zu verallgemeinern. Es gilt nämlich:

Es sei ein beliebiger Bereich $\mathfrak{T}$ vorgelegt, und ferner ein Bereich $\mathfrak{B}$[2]), *dessen sämtliche Punkte zu $\mathfrak{T}$ gehören. Steht alsdann von einer eindeutigen*[3]) *analytischen Funktion $f(x, y)$ fest, daß sie sich an allen denjenigen Stellen von $\mathfrak{T}$ regulär verhält, welche nicht zu $\mathfrak{B}$ gehören, so verhält sie sich in $\mathfrak{T}$ durchweg regulär.*

Wir beweisen den Satz in der folgenden gleichwertigen[4]) Fassung:

---

ergibt sich ebenfalls durch Anwendung des obigen Satzes, daß *sämtliche* Stellen $(0, y)$ $(|y| \leqq g')$ singuläre Stellen sein müssen.

1) Letzteres tritt z. B. bei dem in § 23 behandelten Beispiel ein, wo alle Stellen $(x, 0)$ singuläre sind, für welche x auf der positiv imaginären Halbachse liegt.

2) S. p. 3, Fußn.

3) Vgl. p. 64, Fußn.

4) Ist die Voraussetzung der ersten Fassung erfüllt, so konstruiere man (mit Anwendung des Hilfssatzes § 18) einen noch in $\mathfrak{T}$ gelegenen Bereich $\mathfrak{B}_1$ derart, daß alle Punkte von $\mathfrak{B}$ *innere* Punkte von $\mathfrak{B}_1$ werden; $\mathfrak{B}_1$ erfüllt alsdann die Voraussetzungen der zweiten Fassung.

Es sei ein beliebiger Bereich $\mathfrak{B}$ *vorgelegt, und mit* C *die Randkurve von* B, *mit* C' *diejenige von* B' *bezeichnet. Verhält sich alsdann eine eindeutige analytische Funktion* $f(x, y)$ *an jeder Stelle* (x, y) *regulär, für welche* x *dem Bereich* B *und* y *der Kurve* C', *wie auch an jeder solchen, für welche* x *der Kurve* C *und* y *dem Bereich* B' *angehört, so verhält sie sich in* $\mathfrak{B}$ *durchweg regulär.*[1])

Beweis. Da $f(x, y)$ sich an allen Stellen (x, y) regulär verhält, für welche x dem Bereich B und y der Kurve C' angehört, so kann (gemäß der Folgerung aus dem Hilfssatz, § 18) jedem Punkt $y = y'$ von C' ein Kreis $|y - y'| < \sigma'$ zugeordnet werden, derart daß $f(x, y)$ sich auch an jeder Stelle des Gebietes $(B, |y - y'| < \sigma')$ regulär verhält. Greift man also — wiederum nach dem erwähnten Hilfssatz — aus der Gesamtheit der Kreise $|y - y'| < \frac{\sigma'}{2}$ eine endliche Anzahl derart heraus, daß jeder Punkt y' von C' innerhalb mindestens eines derselben liegt, und bezeichnet mit $2r'$ den Radius des kleinsten derselben, so besteht das Gebiet $(B, |y - y'| < 2r')$, unabhängig von der Wahl von y' auf C', nur aus regulären Stellen.

Die Punkte von B' mögen nun auf zwei Punktmengen verteilt werden. Die eine P_1 derselben umfasse die Gesamtheit derjenigen Punkte y_1 von B', zu welchen mindestens eine singuläre Stelle (x_1, y_1) existiert, deren x-Koordinate x_1 in B gelegen ist; die andere P_0 bestehe aus allen übrigen Punkten von B' und enthält also sicher alle Punkte des Randes C', sowie alle diejenigen Punkte von B', deren Entfernung von irgend einem Randpunkt weniger als $2r'$ beträgt. Ist $P_1 = 0$, so ist damit die Behauptung offenbar erwiesen. Gibt es aber Punkte, welche zu P_1 gehören, so müssen sich in B' zwei Punkte y_0, y_1 nachweisen lassen, von denen der eine y_0 zu P_0 gehört, der andere y_1 zu P_1, und deren Entfernung kleiner ist als eine vorgeschriebene Größe $\frac{r'}{2}$; dabei möge r' der oben fixierte Wert beigelegt werden. Wird alsdann um $y = y_0$ mit dem Radius r' ein Kreis beschrieben, so treffen für diesen in Verbindung mit dem Bereich B der x-Ebene die Voraussetzungen des in § 20 bewiesenen Satzes (wenn dort y durch $y - y_0$ ersetzt wird) wörtlich zu. Mithin muß auch das ganze Gebiet $(B, |y - y_0| < r')$ aus regulären Stellen bestehen, was der Annahme widerspricht, nach welcher y_1 zu P_1 gehören sollte.

---

1) Kurz ausgedrückt: *Verhält eine analytische Funktion* $f(x, y)$ *sich in der Umgebung jedes Begrenzungspunktes eines Bereiches* $\mathfrak{B}$ *regulär, so verhält sie sich in* $\mathfrak{B}$ *durchweg regulär.*

VII. Darstellung der analytischen Funktionen zweier Veränderlichen durch die Zeilen- oder Diagonalenreihen von Potenzreihen.

§ 23.

Obwohl bei der Behandlung der analytischen Funktionen zweier Veränderlichen die Anwendung der absolut konvergenten Doppelreihen ausreicht, so wird doch in vielen Fällen die Zulassung der Zeilen- oder Diagonalenreihen von Potenzreihen wünschenswert sein, da deren Konvergenzbereich im allgemeinen ein größerer ist. Bevor man jedoch untersucht, in welchem Umfange die Benutzung einer solchen möglich ist, wird man sich die Frage vorzulegen haben, ob eine Zeilenreihe (bzw. Diagonalenreihe) innerhalb ihres Konvergenzbereiches überhaupt immer eine durchweg reguläre Funktion darstellt, eine Untersuchung, deren man bei der absolut konvergenten Doppelreihe überhoben war, da mittels der letzteren das reguläre Verhalten einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen gerade definiert wurde.

Aus § 12 ergibt sich nun unmittelbar der folgende Satz:

Konvergiert die Zeilenreihe $P(x, y) = \sum_\nu P_\nu(x) y^\nu$ *für alle der Bedingung* $|y| < \varrho'$ *genügenden Werte von* y *in einem Bereiche* T *der* x*-Ebene, so stellt sie dann und nur dann eine in dem so definierten Bereich* $\mathfrak{T}$ *durchweg reguläre analytische Funktion von* (x, y) *dar, wenn die Konvergenz für jeden der betrachteten Werte von* y *in bezug auf die Umgebung eines jeden Punktes von* T *eine gleichmäßige ist (wenn also der Bereich* T *dem zu* $|y| < \varrho'$ *gehörigen Bereich* P *der gleichmäßigen Konvergenz (§ 11) vollständig angehört).*[1])

Ist nämlich $x = x_0$ ein beliebiger Punkt von T, und konvergiert $P(x, y)$ für $|y| < \varrho'$ gleichmäßig in bezug auf die Umgebung eines jeden Punktes der Kreisfläche $|x - x_0| < \varrho$, so erhält man (gemäß § 12) durch Entwickeln der Funktionen $P_\nu(x)$ nach Potenzen von $x - x_0$ eine Doppel-

1) Man beachte, daß hier die gleichmäßige Konvergenz auch eine *notwendige* Bedingung ist. Hingegen kann, wie bekannt, $P(x, y_0)$, auch ohne im Bereich T durchweg gleichmäßig zu konvergieren, eine in T reguläre analytische Funktion von x darstellen. (C. Runge, Acta Math. 6 (1885), p. 245.)

reihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$, welche im Gebiete $|x - x_0| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ absolut konvergiert und daselbst mit $P(x, y)$ übereinstimmt. Somit läßt sich $P(x, y)$ in der Umgebung eines jeden Punktes von $\mathfrak{T}$ durch eine daselbst absolut konvergierende Doppelreihe ersetzen.

Stellt umgekehrt $P(x, y)$ eine im Bereich $\mathfrak{T}$ durchweg reguläre analytische Funktion von (x, y) dar, so besteht, wenn $x = x_0$ irgend einen Punkt des Gebietes T bezeichnet und die Kreisfläche $|x - x_0| < \varrho$ diesem noch angehört, das Gebiet $|x - x_0| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ nur aus regulären Stellen der Funktion. Mithin gibt es (nach § 17) eine Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$, welche in diesem Gebiet absolut konvergiert und mit $P(x, y)$ übereinstimmt. Aus der ersteren Eigenschaft derselben folgt (§ 12), daß ihre Zeilenreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{P}_\nu(x - x_0) y^\nu$$

für $|y| < \varrho'$ in der Umgebung jeder Stelle des Kreisgebiets $|x - x_0| < \varrho$ gleichmäßig konvergiert, aus der letzteren, daß

$$\overline{P}_\nu(x - x_0) = P_\nu(x) \qquad \text{für } |x - x_0| < \varrho$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Mithin konvergiert $\sum_\nu P_\nu(x) y^\nu$, solange $|y| < \varrho'$, gleichmäßig in der Umgebung jedes Punktes von T.

Tritt in der y-Ebene an Stelle des Kreises $|y| < \varrho'$ um $y = 0$ ein beliebiger Bereich T', so bleibt auch dann noch die gleichmäßige Konvergenz von $P(x, y)$ für alle Werte y des Bereiches T' in bezug auf die Umgebung jedes Punktes x von T (oder, was dasselbe ist, die gleichmäßige Konvergenz von $P(x, y)$ in bezug auf die Umgebung jeder Stelle (x, y) des Bereiches $\mathfrak{T}$) eine hinreichende Bedingung dafür, daß $P(x, y)$ eine in $\mathfrak{T}$ reguläre analytische Funktion darstellt. Denn aus der gleichmäßigen Konvergenz von $P(x, y)$ für $y = y_0$ in einem Bereich der x-Ebene folgt das gleiche für alle $|y| < |y_0|$, so daß sich die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar aus dem obigen Satze ergibt.

Es mag nun zunächst als Illustration für den Fall, in welchem die Bedingung des obigen Satzes *nicht* erfüllt ist, also die durch $P(x, y)$ dargestellte analytische Funktion sich in $\mathfrak{T}$ nicht durchweg regulär verhält, eine Potenzreihe aufgestellt werden, deren Zeilenreihe $P(x, y)$ für jeden endlichen Wert von x und y konvergiert, ohne jedoch in gewissen Gebieten der x-Ebene für irgend einen Wert von y (außer $y = 0$) gleichmäßig zu konvergieren. Wir benutzen zu diesem Zwecke gewisse von Herrn C. Runge[1]) gebildete ganze rationale Funktionen $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzen:

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} g_n(x) = 0$$

1) *Zur Theorie der analytischen Funktionen.* Acta Math. 6 (1885), p. 245.

für jeden endlichen Wert von x;

$$(2) \qquad \left|g_n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right| > 1-\frac{1}{n} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Setzt man nun

$$P_0(x)=1$$
$$P_\nu(x)=[3g_\nu(x)]^{\nu^2} \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

so konvergiert

$$P(x,y)=\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x)y^\nu$$

für jeden endlichen Wert von x und y. Die Konvergenz ist jedoch für keinen (von null verschiedenen) Wert von y eine gleichmäßige in bezug auf die Umgebung des Punktes $x=0$. Denn für $\nu>2$ gilt

$$\left|P_\nu\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}\right)\right| > \left(3-\frac{3}{\nu}\right)^{\nu^2} \geqq 2^{\nu^2}$$

und infolgedessen wachsen, wie auch $y=y_0$ und $\varrho>0$ angenommen werden, in der Reihe der Größen

$$P_\nu\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}\right)y_0^\nu \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

bei welchen die Argumente $\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}$ von irgend einem Term an dem Kreise $|x|<\varrho$ angehören, die absoluten Beträge ins Unendliche.

Es folgt hieraus zunächst, daß die durch $P(x,y)$ definierte Doppelreihe $\mathfrak{P}(x,y)$ außer für $x=0$ und für $y=0$ nirgends absolut konvergieren kann; denn aus der absoluten Konvergenz in einem Punkte (x_0, y_0) würde die absolute Konvergenz im Gebiete $|x|<|x_0|$, $|y|<|y_0|$ folgen, diese aber würde die gleichmäßige Konvergenz der Zeilenreihe in der Umgebung jeder Stelle dieses Gebietes nach sich ziehen.

Man kann das einem Kreise $|y|<\varrho'$ zugeordnete Gebiet P der gleichmäßigen Konvergenz von $P(x,y)$ (§ 11) hier vollständig bestimmen, wenn man noch eine dritte Eigenschaft der Funktionen $g_n(x)$ benutzt. Für alle Punkte x, welche gleichzeitig den beiden Bedingungen

$$|x|\leqq n, \quad |x-ti|\geqq\frac{2}{n} \quad \text{(für jeden Wert } t\geqq 0)$$

genügen[1]), gilt nämlich:

$$(3) \qquad |g_n(x)| < \left|\frac{1}{n(nx-1)}\right| + \frac{1}{n}.$$

Ist nun $x=x_0$ ein beliebiger Punkt der x-Ebene, welcher außerhalb der positiv imaginären Halbachse liegt, und beschreibt man um $x=x_0$ einen Kreis, von dessen Peripheriepunkten noch das nämliche gilt, so sind, sobald n eine gewisse Zahl n_0 übersteigt, für alle Werte x, welche

1) Genügt x diesen beiden Bedingungen, so gehört es nämlich dem in der zitierten Abhandlung definierten Bereich A_n sicher an.

diesem Kreise (inkl. Begrenzung) angehören, die obigen beiden Bedingungen und somit die Ungleichung (3) oder, weil $|x| \geqq \frac{2}{n}$, die Ungleichungen

$$|g_n(x)| < \frac{2}{n} \qquad (n \geqq n_0)$$

und folglich

$$|P_n(x)| < \left(\frac{6}{n}\right)^{n^2} \leqq \left(\frac{6}{n_0}\right)^{n^2} \qquad (n \geqq n_0)$$

erfüllt. Infolgedessen konvergiert $P(x, y)$ für jeden endlichen Wert von y gleichmäßig in bezug auf jenen Kreis der x-Ebene, d. h. die Stelle x_0 gehört, welchen Wert auch ϱ' habe, dem Gebiet P stets an. Ist dagegen $x_0 = t_0 i$ $(t_0 > 0)$, so gehört x_0 niemals zu P, da andernfalls der ganze Kreis $|x| = t_0$, und mithin (§ 11) auch sein Inneres zu P gehören müßte, während von der Stelle $x = 0$ das Gegenteil bereits nachgewiesen ist. Das Gebiet P besteht mithin — unabhängig von der Wahl von ϱ' — aus der ganzen x-Ebene mit Ausschluß der Stellen $x = ti\,(t \geqq 0)$. Ist also $x_0 = s_0 + t_0 i$ ein beliebiger endlicher Wert von x, so konvergiert die durch Entwickeln der Funktionen $P_\nu(x)$ nach Potenzen von $x - x_0$ entstehende Doppelreihe $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$, wenn $t_0 < 0$, im Gebiet $|x - x_0| < |x_0|$, wenn $t_0 \geqq 0$ (jedoch $s_0 \gtrless 0$), im Gebiete $|x - x_0| < |s_0|$ für jeden endlichen Wert von y absolut, dagegen wenn $s_0 = 0$, $t_0 \geqq 0$, an keiner Stelle (x, y), für welche $x - x_0$ und y von null verschieden sind; während in jedem der Fälle die *Zeilenreihe* — da mit $P(x, y)$ identisch — für jeden endlichen Wert der Argumente konvergiert.

$P(x, y)$ stellt, wie hieraus in Übereinstimmung mit dem oben bewiesenen Satz hervorgeht, in jedem Gebiet $\mathfrak{T}$ eine durchweg reguläre analytische Funktion dar, solange das Gebiet T der x-Ebene keinen der Punkte $x = ti\,(t \geqq 0)$ enthält; ist jedoch letzteres der Fall, und enthält[1]) gleichzeitig das Gebiet T' den Nullpunkt, so ist $P(x, y)$ in dem so definierten Bereich nicht mehr durchweg regulär.

Tatsächlich sind für die durch $P(x, y)$ definierte analytische Funktion die Punkte $(ti, 0)$ $(t \geqq 0)$ sämtlich *singuläre Stellen.* Gäbe es nämlich eine Doppelreihe $\mathfrak{P}(x - t_0 i, y)$, welche in einem gewissen Kreisgebiet $|x - t_0 i| < \sigma$, $|y| < \sigma'$ absolut konvergieren und etwa in demjenigen Teil desselben, in welchem der reelle Teil von x größer als null ist, mit $P(x, y)$ übereinstimmen würde, so müßten für jeden derartigen Wert von x ihre Zeilen offenbar mit $P_\nu(x)$ der Reihe nach übereinstimmen, d. h. ihre Zeilen könnten nichts anderes als die nach Potenzen von $x - t_0 i$ entwickelten Funktionen $P_\nu(x)$ sein. Für diese Doppelreihe ist aber nachgewiesen worden, daß sie, außer wenn eines ihrer Argumente verschwindet, nicht absolut konvergieren kann.

Hieraus folgt aber weiter, daß die Stellen (ti, y) $(t \geqq 0, y$ beliebig)

1) Daß diese Beschränkung unnötig ist, wird sich sogleich ergeben.

sämtlich singuläre Stellen sein müssen. Denn ist $y = y_0$ ein beliebiger von null verschiedener Wert, so konvergiert die Doppelreihe $\mathfrak{P}_0(x - x_0, y - y_0)$, welche die Funktion in der Umgebung der regulären Stelle $x = x_0 = s_0 + t_0 i$ $(s_0 \gtrless 0,\ t_0 > 0)$, $y = y_0$ darstellt, gemäß § 17 sicher im Kreisgebiet $|x - x_0| < |s_0|$, $|y - y_0| < \mathrm{P}'$, wo P' der Größe nach unbeschränkt ist, also größer als $|y_0|$ angenommen werden kann. Da aber $(t_0 i, 0)$ eine singuläre Stelle ist, so folgt nach § 19, daß die sämtlichen Stellen $(t_0 i, y)$ $(|y - y_0| \leqq \mathrm{P}')$ singuläre Stellen sein müssen. $P(x, y)$ verhält sich also in einem Gebiet $\mathfrak{T}$ dann und *nur dann* durchweg regulär, wenn der Bereich T der x-Ebene keinen der Punkte $x = ti$ $(t \geqq 0)$ enthält.[1]

Für die *Diagonalenreihen* gilt in dieser Hinsicht der folgende Satz:

Konvergiert die Diagonalenreihe $D(x, y)$ einer Potenzreihe für jeden Wert y eines Bereiches T' gleichmäßig in bezug auf die Umgebung jedes Punktes x eines Bereiches T, so stellt dieselbe eine in dem so definierten Bereich $\mathfrak{T}$ reguläre analytische Funktion dar.

Ist nämlich (x', y') irgend ein Punkt des Bereiches $\mathfrak{T}$, so konvergiert nach § 14 $D(x, y)$ auch in bezug auf die ganze Umgebung dieses Punktes gleichmäßig. Nimmt man also zunächst $y' \neq 0$ an und setzt $x = yz$ so-

1) Auf ähnliche Weise läßt sich ein Beispiel für den Fall konstruieren, wo $P(x, y)$ in bezug auf einen gewissen *Bereich* B der x-Ebene zwar für alle Werte y eines Kreises $|y| < \varrho'$ *gleichmäßig* konvergiert, wo jedoch die Gesamtheit der Werte von y, für welche in B überhaupt Konvergenz stattfindet, einen *größeren* Kreis $|y| < \mathrm{P}'$ erfüllt. Geht man nämlich von ebendenselben ganzen rationalen Funktionen $g_n(x)$ aus, bezeichnet $c_n = \underset{|x|=1}{\mathrm{Max}}\,|g_n(x)|$, (so daß $2c_n \geqq 1$, sobald $n > 1$) und setzt jetzt

$$P_0(x) = 1, \qquad P_\nu(x) = \left(\frac{g_\nu(x)}{c_\nu}\right)^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

so konvergiert $P(x, y)$ wiederum für jeden endlichen Wert von x und y; dagegen ist, da $\underset{|x|=1}{\mathrm{Max}}\,|P_\nu(x)| = 1$, die Konvergenz in bezug auf das Gebiet $|x| \leqq 1$ nur dann eine gleichmäßige, wenn $|y| < 1$ ist. In bezug auf jedes beliebige Gebiet B, welches keinen der Punkte $x = ti$ $(t \geqq 0)$ enthält, ist jedoch auch hier die Konvergenz für jeden endlichen Wert von y eine gleichmäßige.

Während nun in bezug auf den Bereich $|x| \leqq 1$ nur für $|y| < 1$ gleichmäßige Konvergenz stattfindet, so konvergiert $P(x, y)$ im *Innern* desselben (d. h. in bezug auf die Umgebung jeder Stelle $|x| < 1$) für jeden endlichen Wert von y gleichmäßig. Dies ist zunächst noch zweifelhaft für die Umgebung der Stellen $x = ti$ $(0 \leqq t < 1)$; man überzeugt sich aber leicht davon, daß die durch $P(x, y)$ definierte analytische Funktion sich an allen Stellen (ti, y) $(0 \leqq t < 1$, y beliebig) regulär verhalten muß. Wäre nämlich eine solche $(t_0 i, y_0)$ singulär, so würde man wie bei dem obigen Beispiel nachweisen, daß $(t_0 i, y)$ auch bei beliebigem y eine singuläre Stelle sein müßte, was aber für $|y| < 1$ nicht zutrifft. Es ergibt sich daher schließlich mit Anwendung der gleichen Hilfsmittel wie bei dem Beispiel des Textes, daß $P(x, y)$ — unabhängig von y — in einem Gebiet B dann und nur dann gleichmäßig konvergiert, wenn dasselbe keinen der Punkte $x = ti$ $(t \geqq 1)$ enthält, während die sämtlichen Stellen (ti, y) $(t \geqq 1)$ singuläre Stellen der durch $P(x, y)$ dargestellten Funktion sind.

wie $x' = y'z'$, so konvergiert $D(x, y) = \sum_\lambda D_\lambda(z) y^\lambda$ auch in bezug auf y und z in einer gewissen Umgebung des Punktes $y = y'$, $z = z'$ gleichmäßig und stellt mithin eine innerhalb dieser letzteren reguläre analytische Funktion von y und z, und folglich gemäß § 6 auch eine in der Umgebung des Punktes (x', y') reguläre analytische Funktion von (x, y) dar. Ist jedoch $y' = 0$, so konvergiert (§ 14) $\mathfrak{P}(x, y)$ selbst noch absolut in einem gewissen Kreisgebiet $|x| < |x_0|$, $|y| < \varrho'$, welches den Punkt $(x', 0)$ als inneren Punkt enthält.

§ 24.

Wir wollen uns nun schließlich der Frage zuwenden, in welcher Ausdehnung eine beliebige analytische Funktion von (x, y) durch die Zeilenreihe $P(x, y)$ einer nach Potenzen von x und y fortschreitenden Doppelreihe dargestellt werden kann; es wird sich dabei weniger um neue Untersuchungen als um eine Zusammenstellung der Tatsachen handeln.

Eine gegebene analytische Funktion $f(x, y)$ (oder allgemeiner eine beliebige von x und y abhängige Größe) läßt sich in einem vorgelegten Bereich $\mathfrak{T}$, in welchem sie eindeutig definiert ist, offenbar dann und nur dann durch einen Ausdruck von der Form $P(x, y)$ darstellen, wenn dieselbe erstens für jeden Wert x des Bereiches T eine in T' reguläre analytische Funktion von y ist, deren Fortsetzung sich auch noch in dem größeren Gebiete $|y| < \mathsf{P}'$ durchweg regulär verhält, und wenn zweitens bei der Entwicklung der so definierten analytischen Funktion von y nach Potenzen der Größe y die Koeffizienten in ihrer Abhängigkeit von x sich als im Bereiche T reguläre analytische Funktionen ergeben, deren Fortsetzung auch noch im Gebiet $|x| < \mathsf{P}$ durchweg regulär ist. Dabei bedeutet P (bzw. P') die obere Grenze der absoluten Beträge sämtlicher dem Bereich T (bzw. T') angehörenden Werte. Über die Gestalt des Konvergenzbereiches einer beliebigen Zeilenreihe $P(x, y)$ läßt sich dementsprechend von vornherein nur[1]) aussagen, daß für irgend einen Wert $x = x_0$ ($|x_0| < X$) die Veränderliche y auf die Fläche des Konvergenzkreises der Potenzreihe $P(x_0, y)$ beschränkt ist, also — vorausgesetzt, daß letzterer einen von null verschiedenen Radius besitzt — auf die Fläche desjenigen Kreises um $y = 0$, dessen Peripherie durch eine singuläre Stelle der analytischen Funktion $P(x_0, y)$ von y hindurchgeht, während sein Inneres von singulären Stellen derselben frei ist.

Während nun die durch eine beliebige Zeilenreihe $P(x, y)$ dargestellte Größe durchaus nicht eine innerhalb jedes Bereiches $\mathfrak{T}$, welcher dem Konvergenzbereich vollständig angehört, reguläre analytische Funktion von (x, y) zu sein braucht, ja sogar in verschiedenen Teilbereichen eines der-

1) Vgl. die Beispiele p. 29, Fußn. 2).

artigen Bereiches $\mathfrak{T}$ verschiedene analytische Funktionen definieren kann[1]), so werden die Verhältnisse weit übersichtlicher, wenn man sich auf die Betrachtung von Bereichen beschränkt, in welchen die Zeilenreihe *gleichmäßig* konvergiert. Es ergibt sich nämlich alsdann unmittelbar:

Damit eine von x und y abhängige Größe $f(x, y)$ in einem Bereich $\mathfrak{T}$, in welchem sie eindeutig definiert ist, durch die in der Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{T}$ gleichmäßig konvergierende Zeilenreihe $P(x, y)$ einer nach Potenzen von x und y fortschreitenden Doppelreihe dargestellt werden könne, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x, y)$ erstens eine in $\mathfrak{T}$ reguläre analytische Funktion von (x, y) sei, deren Fortsetzung sich auch noch in dem größeren Gebiete $(T, |y| < \mathsf{P}')$ eindeutig und regulär verhalte, und daß zweitens bei der Entwicklung dieser Funktion nach Potenzen von y die (an sich schon in T regulären) Koeffizienten sich auch noch im Gebiet $|x| < \mathsf{P}$ sämtlich regulär verhalten. (Dabei haben P und P' die oben angegebene Bedeutung.) Diese Darstellung der vorgelegten analytischen Funktion $f(x, y)$ gilt alsdann sicher noch in jedem weiteren Gebiete, welches in der y-Ebene aus einem beliebigen Kreise $|y| < \varrho'$ um den Nullpunkt, in der x-Ebene aus irgend einem Bereich T_1 besteht, dessen sämtliche Punkte dem zu $|y| < \varrho'$ gehörigen Gebiet P der gleichmäßigen Konvergenz von $P(x, y)$ (§ 11) angehören, und welcher mindestens einen Punkt mit T gemein hat; denn in jedem derartigen Gebiete stellt $P(x, y)$ sicher die analytische Fortsetzung der Funktion $f(x, y)$ dar.

Der Bereich der gleichmäßigen Konvergenz einer beliebigen Zeilen-

---

1) Hat $P(x, y)$ die gleiche Bedeutung wie bei dem in § 23 behandelten Beispiel, so liefert die Zeilenreihe $P(x, y) + P(-x, y)$ ein Beispiel dieser Art. Dieselbe konvergiert nämlich für jeden endlichen Wert von x und y; jedoch ist jede Stelle (x, y), deren erste Koordinate einen rein imaginären Wert besitzt, eine singuläre. Die Zeilenreihe stellt also zwei verschiedene analytische Funktionen in ihrer ganzen Ausdehnung dar, und zwar tritt hier speziell der im Text erwähnte Fall ein. — In zwei *voneinander getrennten* Bereichen $\mathfrak{T}$ allerdings kann, wie hieraus hervorgeht, eine Zeilenreihe $P(x, y)$, auch wenn sie in jedem derselben *gleichmäßig* konvergiert, verschiedene analytische Funktionen darstellen (niemals jedoch in Teilbereichen eines einzigen Bereiches $\mathfrak{T}$, in welchem sie durchweg gleichmäßig konvergiert). Ein weiteres Beispiel dieser letzteren Art liefert $P(x, y) = \sum_\nu (x^2 - 4)^{\nu^2} y^\nu$; diese Zeilenreihe konvergiert — unabhängig von y — an jeder Stelle des aus zwei getrennten Teilen bestehenden Gebiets $|x^2 - 4| < 1$, und zwar gleichmäßig in der Umgebung jeder derselben. Eine Fortsetzung der Funktion über dies Gebiet hinaus ist aber nicht möglich. Denn ist $x = x_0$ ein Punkt desselben, K_0 der größte Kreis um $x = x_0$, dessen Inneres dem Gebiet $|x^2 - 4| < 1$ noch angehört, und x_1 derjenige Punkt seiner Peripherie, für welchen $|x_1^2 - 4| = 1$ ist, so konvergiert (§ 12) die Doppelreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$ für jeden Wert von y innerhalb des Kreises K_0 absolut, jedoch offenbar für keinen (von null verschiedenen) Wert von y über denselben hinaus. K_0 ist also für die Doppelreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$ der Maximalkreis in der x-Ebene, und mithin (§ 19) *jede* Stelle (x_1, y) eine singuläre, da $(x_1, 0)$ eine solche ist. $P(x,y)$ stellt somit in den beiden Gebieten, in deren jedem es gleichmäßig konvergiert, je eine analytische Funktion in ihrer ganzen Ausdehnung dar.

reihe $P(x, y)$ kann daher mittels der singulären Stellen der durch sie dargestellten analytischen Funktion in der folgenden Weise charakterisiert werden, wobei X wiederum die untere Grenze der Konvergenzradien sämtlicher Zeilen bezeichnet:

Erfüllt das einem Kreise $|y| < \varrho'$ *zugeordnete Gebiet* P *der gleichmäßigen Konvergenz von* $P(x, y)$ (§ 11) *nicht das ganze Innere des Kreises* $|x| < X$, *so gibt es zu einem jeden der Bedingung* $|x_0| < X$ *genügenden Begrenzungspunkt* x_0 *von* P *mindestens eine singuläre Stelle* (x_0, y_0), *für welche* $|y_0| \leqq \varrho'$ *ist, (und zwar dann und nur dann eine solche, für welche geradezu* $|y_0| < \varrho'$ *ist, wenn der Begrenzungspunkt* x_0 *dem Gebiet* P *nicht mehr angehört).*[1]

Wäre dies nämlich für irgend einen Begrenzungspunkt x_0 nicht der Fall, so müßte es (§ 18) eine Zahl $\varrho_0 > 0$ geben, derart daß das ganze Gebiet $|x - x_0| \leqq \varrho_0$, $|y| \leqq \varrho'$ nur aus regulären Stellen bestünde; alsdann müßte aber nach obigem (falls $\varrho_0 < X - |x_0|$ gewählt ist) die Darstellung durch die gleichmäßig konvergierende Zeilenreihe $P(x, y)$ noch in diesem Gebiete gelten, d. h. der Kreis $|x - x_0| \leqq \varrho_0$ müßte entgegen der Voraussetzung dem Gebiet P noch vollständig angehören. — Gibt es speziell für einen Begrenzungspunkt x_0 keine singuläre Stelle (x_0, y_0), für welche $|y_0| < \varrho'$ ist, so besteht, wie klein auch $\varepsilon > 0$ angenommen wird, ein gewisses Gebiet $|x - x_0| \leqq \varrho_\varepsilon$, $|y| \leqq \varrho' - \varepsilon$ nur aus regulären Stellen, und hieraus ergibt sich in ganz analoger Weise, daß der Punkt x_0 noch zu P gehören muß; ebenso gilt das Umgekehrte.

Die Lage dieser singulären Stellen kann unter Benutzung der in § 12 definierten Größen R'_x in folgender Weise näher angegeben werden:

Ist x_0 *ein beliebiger Wert von* x, *dessen absoluter Betrag unterhalb* X *liegt, so gibt es stets eine singuläre Stelle* (x_0, y_0), *für welche* $|y_0| = R'_{x_0}$, *dagegen keine, für welche* $|y_0| < R'_{x_0}$ ist.[2]

Denn da R'_{x_0} den y-Maximalradius der Doppelreihe $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$ bedeutet, welche dem Werte nach mit $P(x, y)$ übereinstimmt, so verhält sich $P(x, y)$ an allen Stellen (x_0, y), $(|y| < R'_{x_0})$ regulär, dagegen existiert nach § 19 notwendig eine singuläre Stelle (x_0, y_0), für welche $|y_0| = R'_{x_0}$ ist. Ist speziell $R'_{x_0} = 0$, so kann offenbar die Stelle $(x_0, 0)$ keine reguläre sein.

Erfüllt endlich das Gebiet P das ganze Innere des Kreises $|x| < X$, so *gibt es mindestens einen Wert* x_1 *mit dem absoluten Betrage* X *derart,*

---

1) Bei dem Beispiel § 13 ist P das Gebiet $|x| < 1$, $|x - 1| \geqq \varrho'$; dementsprechend besitzt die Funktion $f(x + y)$ zu jedem Punkt $x = x_0$, für welchen die beiden Bedingungen $|x_0| < 1$, $|x_0 - 1| = \varrho'$ erfüllt sind, eine singuläre Stelle (x_0, y_0), für welche $|y_0| = \varrho'$ ist, nämlich $y_0 = 1 - x_0$. Hingegen gehören bei dem in § 23 behandelten Beispiel die Begrenzungspunkte x_0 von P dem Gebiet P nicht an; tatsächlich sind hier die Punkte (x_0, y) bei *jedem* Wert von y singuläre Stellen.

2) Dabei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß entweder R'_{x_0} selbst von null verschieden ist, oder daß es wenigstens in jeder Nähe des Punktes $x = x_0$ Stellen gibt, für welche R'_x nicht null ist.

daß alle Stellen (x_1, y) $(|y| \leqq \varrho')$ *singuläre Stellen sind.* Denn in diesem Falle konvergiert die Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiet $|x| < X$, $|y| < \varrho'$ absolut, ihr Maximalradius in der x-Ebene ist also X selbst, und hieraus folgt das Behauptete nach § 19.

Es mögen nun noch für die Diagonalenreihen die entsprechenden Betrachtungen angestellt werden. Zuvor sei noch daran erinnert, daß, wenn $x = yz$ sowie $x_0 = y_0 z_0$ gesetzt, und y_0 von null verschieden angenommen wird, eine an der Stelle (x_0, y_0) reguläre analytische Funktion von (x, y), als Funktion von z und y aufgefaßt, an der Stelle $z = z_0$, $y = y_0$ ebenfalls regulär ist, und umgekehrt. Es ergibt sich dies unmittelbar aus § 6. Es gilt nun der Satz:

Verhält sich eine analytische Funktion $f(x, y)$ *an jeder Stelle* (x, y) *eindeutig und regulär, für welche* y *einem Kreise* $|y| < \varrho'$ *um den Nullpunkt, und* $\frac{x}{y} = z$ *einem endlichen Bereiche* T'' *der* z*-Ebene angehört, so existiert eine nach Potenzen von* x *und* y *fortschreitende Doppelreihe* $\mathfrak{P}(x, y)$, *deren Diagonalenreihe in dem genannten Gebiet durchweg konvergiert (und zwar gleichmäßig in der Umgebung jeder Stelle desselben) und daselbst mit* $f(x, y)$ *übereinstimmt.*[1])

Beweis. Da der Punkt $x = 0$, $y = 0$ dem Gebiete sicher angehört, so existiert eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$, welche in der Umgebung dieses Punktes absolut konvergiert und daselbst mit $f(x, y)$ übereinstimmt. Das letztere gilt mithin auch von ihrer Diagonalenreihe $D(x, y) = \sum_\lambda D_\lambda(z) y^\lambda$, welche wir wieder als die Zeilenreihe der durch die Substitution $x = yz$ aus $\mathfrak{P}(x, y)$ hervorgehenden Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(z, y)$ auffassen wollen. Die Doppelreihe $\mathfrak{P}_1(z, y)$ konvergiert aber, wenn ϱ_0' hinreichend klein gewählt wird, für $|y| < \varrho_0'$ in einem beliebig großen Kreise um $z = 0$ absolut, also bei geeigneter Wahl von ϱ_0' auch in einem solchen, welcher T'' vollständig umfaßt. Ihre Zeilenreihe $\sum_\lambda D_\lambda(z) y^\lambda$ konvergiert daher für $|y| < \varrho_0'$ gleichmäßig in bezug auf die Umgebung jedes Punktes z des Bereiches T'' und stimmt auch hier noch mit $f(x, y)$ überein. Das gleiche muß aber auch noch für $|y| < \varrho'$ der Fall sein; denn $f(x, y)$ besitzt, als Funktion von z und y aufgefaßt, auch in diesem größeren Gebiete nunmehr sicher diejenigen beiden oben näher bezeichneten Eigenschaften, welche für ihre Darstellung durch eine gleichmäßig konvergierende *Zeilenreihe* in demselben erforderlich sind.

Hieraus folgt nun unmittelbar:

Damit eine von x *und* y *abhängige Größe* $f(x, y)$ *in einem vorgelegten*

1) Vgl. das Beispiel in § 13; T'' ist daselbst der Kreis um $z = -1$ mit dem Radius $\frac{1}{\varrho'}$.

Bereich $\mathfrak{T}$, in welchem sie eindeutig definiert ist, durch die in der Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{T}$ gleichmäßig konvergierende Diagonalenreihe $D(x, y)$ einer nach Potenzen von x und y fortschreitenden Doppelreihe dargestellt werden könne, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x, y)$ eine an jeder Stelle (x', y') des Bereiches $\mathfrak{T}$ reguläre analytische Funktion von (x, y) sei, deren Fortsetzung sich auch noch an jeder Stelle $(\varkappa x', \varkappa y')$ eindeutig und regulär verhalte. Dabei soll $\varkappa$ alle komplexen Zahlen durchlaufen, deren absoluter Betrag unterhalb eins liegt.[1])

Daß diese Bedingung eine notwendige ist, ergibt sich ohne weiteres aus dem in § 23 über die Diagonalenreihen bewiesenen Satze. Ist sie andererseits erfüllt, und bedeutet (x_0, y_0) irgend einen Punkt des Bereiches $\mathfrak{T}$, so wähle man eine Größe μ ($|\mu| > 1$) so, daß der Punkt mit den Koordinaten $x_1 = \mu x_0$, $y_1 = \mu y_0$ dem Bereiche $\mathfrak{T}$ ebenfalls noch angehöre. Setzt man nun zunächst $y_0 \neq 0$ voraus und bezeichnet mit z_0 den Quotienten $\frac{x_0}{y_0} = \frac{x_1}{y_1}$, so befindet sich unter der Gesamtheit der Werte $\frac{x'}{y_1}$ (wo x' den Bereich T durchläuft) sicher der Wert z_0 sowie eine gewisse Umgebung T'' desselben. Alsdann ist aber, da $f(x, y)$ sich an jeder Stelle $(\varkappa x', \varkappa y_1)$ regulär verhält, für die Kreisfläche $|y| < |y_1|$ in Verbindung mit dem Bereiche T'' die Voraussetzung des vorigen Satzes sicher erfüllt, und es existiert somit eine Diagonalenreihe $D(x, y)$, welche in diesem Gebiet, speziell also in einer gewissen Umgebung des Punktes (x_0, y_0) gleichmäßig konvergiert und daselbst mit $f(x, y)$ übereinstimmt. Da nun $D(x, y)$ nichts anderes als die Diagonalenreihe der die Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung der Stelle $(0, 0)$ darstellenden Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ ist, so wird man, von welchem Punkte (x_0, y_0) man auch ausgeht, stets zu einer und derselben Diagonalenreihe geführt werden. Ist endlich $y_0 = 0$, so kann, da sich $f(x, y)$ nach Voraussetzung an allen Stellen $(\varkappa x_1, 0)$ regulär verhält, der Maximalradius R von $\mathfrak{P}(x, y)$ nicht kleiner sein als $|x_1|$, und $\mathfrak{P}(x, y)$ konvergiert demnach in der Umgebung der Stelle $(x_0, 0)$ noch absolut.

Diese Darstellung einer analytischen Funktion $f(x, y)$ durch eine Diagonalenreihe $D(x, y)$ gilt alsdann stets noch in jedem beliebigen Gebiet $\mathfrak{T}$, dessen sämtliche Punkte (x, y) einer der beiden Bedingungen $0 < |y| < \mathrm{P}'_z$ oder $y = 0$, $|x| < R$ genügen, und welches mindestens einen Punkt mit dem ursprünglichen Gebiete gemein hat; dabei bedeutet (vgl. § 14) P'_{z_0} den y-Maximalradius derjenigen Doppelreihe $\mathfrak{P}_1(z - z_0, y)$, welche entsteht, wenn in der aus $\mathfrak{P}(x, y)$ hervorgehenden Doppelreihe $\mathfrak{P}_1(z, y) = \sum_\lambda D_\lambda(z) y^\lambda$ sämtliche Zeilen nach Potenzen von $z - z_0$ geordnet werden,

1) In dem Beispiel von § 13 ist für irgend einen Bereich $\mathfrak{T}$ diese Bedingung dann und nur dann erfüllt, wenn für jeden Punkt (x', y') desselben die Ungleichung $|x' + y'| < 1$ statt hat.

und R den Maximalradius von $\mathfrak{P}(x, y)$ in der x-Ebene. In der Umgebung jeder Stelle eines derartigen Gebietes nämlich konvergiert (§ 14) $D(x, y)$ gleichmäßig und stellt daher (§ 23) eine daselbst reguläre analytische Funktion von (x, y) dar.

Das durch die Bedingung $0 < |y| < \mathsf{P}'_z$ bzw. $y = 0$, $|x| < R$ bezeichnete Gebiet der gleichmäßigen Konvergenz von $D(x, y)$ wird dementsprechend funktionentheoretisch dadurch charakterisiert, daß es *zu jedem beliebigen endlichen Werte* $z = z_0$ *eine singuläre Stelle* (x_0, y_0) *von* $f(x, y)$ *gibt, für welche* $\frac{x_0}{y_0} = z_0$ *und* $|y_0| = \mathsf{P}'_{z_0}$ *ist, dagegen keine, für welche* $|y_0| < \mathsf{P}'_{z_0}$ *ist* (und ferner eine singuläre Stelle $(x_0, 0)$, für welche $|x_0| = R$, jedoch keine, für welche $|x_0| < R$ ist).

Denn faßt man $D(x, y)$ wiederum als die Zeilenreihe von $\mathfrak{P}_1(z, y)$ auf, so zeigt sich, daß $f(x, y)$, als Funktion von z und y aufgefaßt, singuläre Stellen der angegebenen Art besitzen muß; diese können aber, da bei endlichem z_0 stets $\mathsf{P}'_{z_0} > 0$ ist, auch bei Auffassung von x und y als Argumente der Funktion keine regulären Stellen sein. Dagegen kann es keine singuläre Stelle geben, für welche $|y_0| < \mathsf{P}'_{z_0}$ ist, da die Diagonalenreihe in der Umgebung jeder solchen Stelle noch gleichmäßig konvergiert.

Am 20. Mai 1874 zu Brüssel geboren, israelitischer Konfession, erhielt ich meine Schulbildung zu Frankfurt a. M. auf dem städtischen Realgymnasium Wöhlerschule. Ostern 1892 verließ ich dieses mit dem Zeugnis der Reife und bezog, nachdem ich je ein Semester an den technischen Hochschulen zu Hannover und Berlin verbracht hatte, die Universität Berlin, um mich vornehmlich mathematischen Studien zu widmen. Ich besuchte hier die Vorlesungen der Herren Professoren v. Bezold, Frobenius, Fuchs †, Grimm †, v. Gizycki †, Hettner, Knoblauch, Kundt †, Paulsen, Planck, Schlesinger, Schwarz, Stumpf.

Vom Wintersemester 1895/96 bis zum Sommersemester 1897 hörte ich an der Universität München die Vorlesungen der Herren Professoren Bauer, Grätz, Lindemann und Pringsheim, um sodann meine Studien wiederum an der Universität Berlin fortzusetzen, wo ich insbesondere den Vorlesungen der Herren Professoren Hensel, Schwarz, Planck folgte und mich an den von Herrn Professor Schwarz geleiteten mathematischen Kolloquien, an den Übungen des mathematischen und des psychologischen Seminars sowie an denjenigen des Instituts für theoretische Physik beteiligte. Endlich nahm ich Ostern 1902 mein Studium an der Universität München wieder auf, besuchte hier noch die Vorlesungen der Herren Professoren v. Baeyer, Lindemann, v. Müller, Pringsheim, Röntgen und beteiligte mich an den von Herrn Professor Röntgen geleiteten physikalischen Kolloquien.

Allen meinen verehrten Lehrern fühle ich mich zu großem Danke verpflichtet.

